微分積分（3）　実数解の個数「定数分離」

$\boxed{1}$ 基礎編［８２］

x の方程式 $x^3-12x+7=a$ ……① の異なる実数解の個数が、定数 a の値によってどのように変化するか調べたい。

(1) 関数 $y=x^3-12x+7$ のグラフの概形をかけ。

(2) (1)のグラフを参考にして、方程式①の異なる実数解の個数を、定数 a の値で場合分けして答えよ。

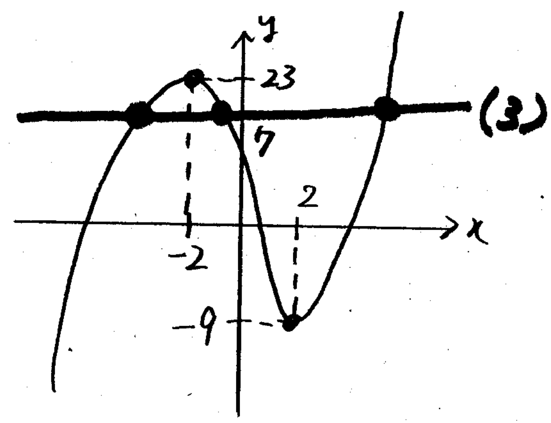
(3) 方程式①が異なる２個の負の解と１個の正の解をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{解}$ (1) $y' = 3x^2-12$

$= 3(x^2-4)$

$= 3(x+2)(x-2)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	23	$\searrow$	-9	$\nearrow$



(2) $\begin{cases} -9<a<23 \text{ のとき } 3\text{個} \\ a=-9,\ 23 \text{ のとき } 2\text{個} \\ a<-9,\ 23<a \text{ のとき } 1\text{個} \end{cases}$

(3) $7<a<23$

2　関数 $f(x)=x^3+2x^2-4x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　点 $(0,\ k)$ から曲線 $y=f(x)$ に引くことができる接線の本数を調べよ。

解　(1)

接点 $(t,\ t^3+2t^2-4t)$

$f'(x)=3x^2+4x-4$

↓ $x=t$ を代入

傾き $f'(t)=3t^2+4t-4$

$$y-(t^3+2t^2-4t)=(3t^2+4t-4)(x-t)$$

$$y=(3t^2+4t-4)x-t(3t^2+4t-4)+(t^3+2t^2-4t)$$

$$\therefore\ y=(3t^2+4t-4)x-2t^3-2t^2$$

(2)　$(0,k)$ を代入して

$$-2t^3-2t^2=k$$

<考え方>

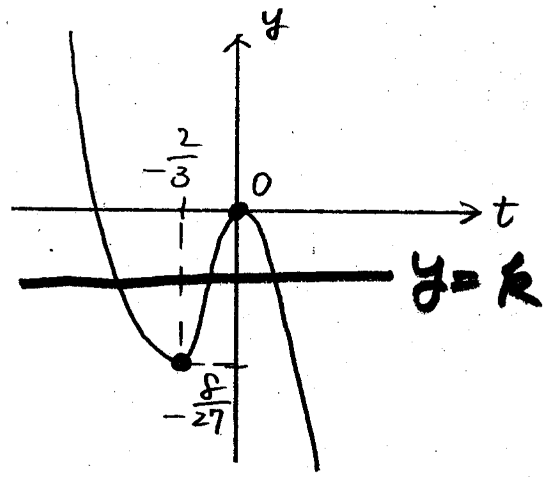
解 t の個数 $\Leftrightarrow$ 接点の個数 $\Leftrightarrow$ 接線の本数

$\begin{cases} y=-2t^3-2t^2 \\ y=k \end{cases}$ の共有点の個数を調べる。

$y'=-6t^2-4t$

$=-2t(3t+2)$

t	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-\frac{8}{27}$	$\nearrow$	0	$\searrow$



よって 接線の本数は

$\begin{cases} -\frac{8}{27}<k<0 \text{ のとき 3本} \\ k=-\frac{8}{27},\ 0 \text{ のとき 2本} \\ k<-\frac{8}{27},\ 0<k \text{ のとき 1本} \end{cases}$

※対策編［５１］に取り組もう！