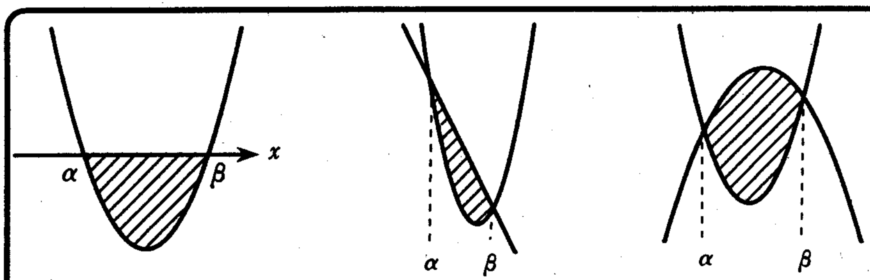
微分積分（5）　面積②　「ベロ公式」



放物線と直線で囲まれた上のような面積を求めるとき、

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}-k(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3$$ の公式が便利です。

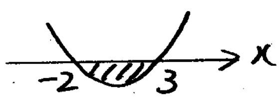
2交点の x 座標

※この公式に正式名称はなく、私を含め道内の数名の教員で使っている言葉です。ベロ（舌）に見えるでしょ？一般の人に「ベロ公式」と言っても、通じないので注意してください。

$\boxed{1}$　次の曲線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2-x-6$

$=(x-3)(x+2)$



$S=-\int_{-2}^{3}(x^2-x-6)dx$

$=\frac{1}{6}(3+2)^3=\frac{125}{6}$

(2)　$y=-x^2+3x$

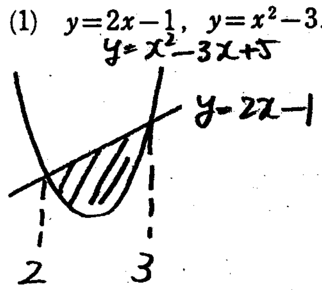
$=-x(x-3)$

$S=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx$

$=\frac{1}{6}(3-0)^3=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$

$\boxed{2}$　次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=2x-1$，$y=x^2-3x+5$



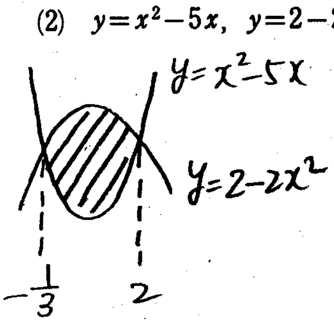
$$\left(\begin{array}{l} x^2-3x+5=2x-1 \\ x^2-5x+6=0 \\ (x-2)(x-3)=0 \quad \therefore x=2,3 \end{array}\right)$$

$S=\int_{2}^{3}\{2x-1-(x^2-3x+5)\}dx$

$=\int_{2}^{3}(-x^2+5x-6)dx$

$=\frac{1}{6}(3-2)^3=\frac{1}{6}$

(2)　$y=x^2-5x$，$y=2-2x^2$



$$\left(\begin{array}{l} x^2-5x=2-2x^2 \\ 3x^2-5x-2=0 \\ (x-2)(3x+1)=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{3},2 \end{array}\right)$$

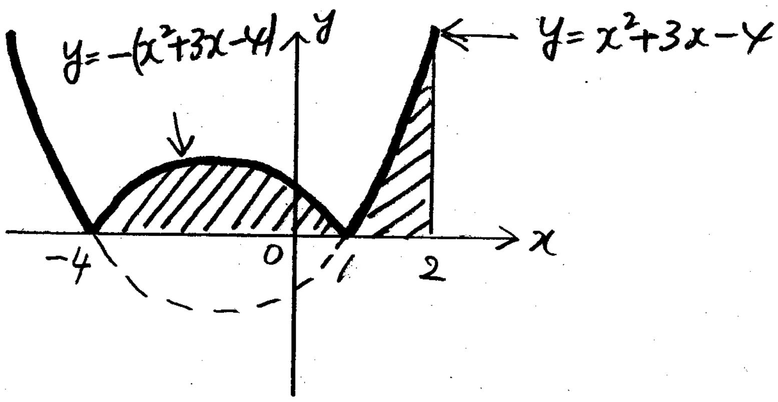
$S=\int_{-\frac{1}{3}}^{2}\{2-2x^2-(x^2-5x)\}dx$

$=\int_{-\frac{1}{3}}^{2}(-3x^2+5x+2)dx$

$=\frac{3}{6}\left(2+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{2}\times\frac{343}{27}=\frac{343}{54}$

$\boxed{3}$ 定積分 $\int_{-4}^{2}|x^2+3x-4|dx$ を求めよ。

$$y=|(x+4)(x-1)|dx=\begin{cases} x^2+3x-4 & (x\leqq -4,\ 1\leqq x \text{ のとき}) \\ -(x^2+3x-4) & (-4<x<1 \text{ のとき}) \end{cases}$$



$$\int_{-4}^{2}|x^2+3x-4|dx$$

$$=\int_{-4}^{1}-(x^2+3x-4)dx+\int_{1}^{2}(x^2+3x-4)dx$$

$$=\frac{1}{6}(1+4)^3+\frac{1}{3}[x^3]_1^2+\frac{3}{2}[x^2]_1^2-4[x]_1^2$$

$$=\frac{125}{6}+\frac{1}{3}(8-1)+\frac{3}{2}(4-1)-4(2-1)$$

$$=\frac{125}{6}+\frac{7}{3}+\frac{9}{2}-4$$

$$=\frac{125+14+27-24}{6}$$

$$=\frac{142}{6}=\underline{\frac{71}{3}}$$

※基礎編[８６]に取り組もう！