微分積分（6）　積分方程式

<パターン1>　公式　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$　(ただし、a は定数)

t が x に変わる。

原理　$f(t)=t^2 \implies \displaystyle\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{3}\left[t^3\right]_a^x = \frac{1}{3}(x^3-a^3) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a^3}{3} \implies x^2$

x で微分

イメージとしては　$f(t) \implies \displaystyle\int_a^x f(t)dt \implies f(x)$　元に戻る感じ

積分して　微分して

1 次の等式を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

$$\int_1^x f(t)dt = 2x^2 + x + a$$

＜パターン２＞　p, q を定数とする。$\int_p^q f(t)dt = a$ （定数） とおける。

例　$\int_0^1 \underline{(3t^2+2t+1)}dt = [t^3]_0^1 + [t^2]_0^1 + [t]_0^1 = 3$ 　←定数ですね。
t だけの式

注意　$\int_0^1 \underline{(3xt^2+2x^2t)}dt = x[t^3]_0^1 + x^2[t^2]_0^1 = x + x^2$ ←定数でない。
t 以外の文字を含む。

この場合、

定数

$$\int_0^1 (3xt^2+2x^2t)dt = 3x\int_0^1 t^2 dt + 2x^2\int_0^1 t dt$$

のように t 以外を外に出すと、2つの定積分は定数である。

$\boxed{2}$ 次の等式 を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = x + \int_0^3 f(t)dt$

(2) $f(x) = 1 + \int_0^1 (x-t)f(t)dt$