＜パターン1＞　公式 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$　(ただし、a は定数)

t が x に変わる。

$\boxed{\text{原理}}$ $f(t)=t^2 \implies \displaystyle\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{3}\left[t^3\right]_a^x = \frac{1}{3}(x^3-a^3) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a^3}{3} \xrightarrow{x\text{で微分}} x^2$

イメージとしては $f(t) \xrightarrow{\text{積分して}} \displaystyle\int_a^x f(t)dt \xrightarrow{\text{微分して}} f(x)$　元に戻る感じ

$\boxed{1}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

$\displaystyle\int_1^x f(t)dt = 2x^2 + x + a$　…①

両辺を x で微分する。

$f(x) = \underline{4x+1}$

①に $x=1$ を代入する。

$\displaystyle\int_1^1 f(t)dt = 2+1+a$

$0 = 3+a$

$\underline{a=-3}$

<パターン2>　p, q を定数とする。$\int_p^q f(t)dt = a$ （定数）とおける。

例　$\int_0^1 \underline{(3t^2+2t+1)}dt = [t^3]_0^1 + [t^2]_0^1 + [t]_0^1 = 3$　←定数ですね。
t だけの式

注意　$\int_0^1 \underline{(3xt^2+2x^2t)}dt = x[t^3]_0^1 + x^2[t^2]_0^1 = x + x^2$　←定数でない。
t 以外の文字を含む。

この場合、

$$\int_0^1 (3xt^2+2x^2t)dt = 3x\int_0^1 t^2dt + 2x^2\int_0^1 tdt$$

（$\boxed{定数}$）

のように t 以外を外に出すと、2つの定積分は定数である。

$\boxed{2}$　次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x) = x + \int_0^3 f(t)dt$

$a = \int_0^3 f(t)dt$ とおく。

$f(x) = x + a$ となる。

$a = \int_0^3 (t+a)dt$

$= \frac{1}{2}[t^2]_0^3 + a[t]_0^3$

$a = \frac{9}{2} + 3a$

$-2a = \frac{9}{2}$　∴ $a = -\frac{9}{4}$

よって　$f(x) = \underline{x - \frac{9}{4}}$

(2)　$f(x) = 1 + \int_0^1 (x-t)f(t)dt$

$f(x) = 1 + \int_0^1 xf(t)dt - \int_0^1 tf(t)dt$

$= 1 + x\int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 tf(t)dt$

$a = \int_0^1 f(t)dt$, $b = \int_0^1 tf(t)dt$ とおくと $f(x) = ax + (1-b)$

[1]　$a = \int_0^1 \{at + (1-b)\}dt$

$a = \frac{a}{2}[t^2]_0^1 + (1-b)[t]_0^1$

$a = \frac{a}{2} + 1 - b$

$a + 2b = 2$ …①

[2]　$b = \int_0^1 t\{at + (1-b)\}dt$

$= \int_0^1 \{at^2 + (1-b)t\}dt$

$= \frac{a}{3}[t^3]_0^1 + \frac{1}{2}(1-b)[t^2]_0^1$

$b = \frac{a}{3} + \frac{1-b}{2}$

$2a - 9b = -3$ …②

①, ②より　$a = \frac{12}{13}$, $b = \frac{7}{13}$

よって　$f(x) = \underline{\frac{12}{13}x + \frac{6}{13}}$