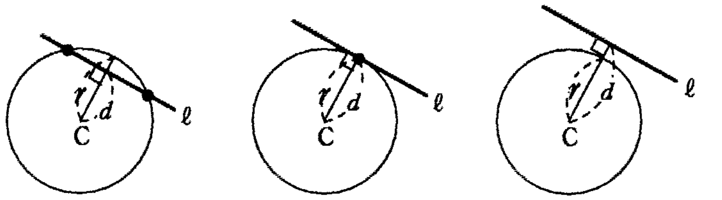
円と接線



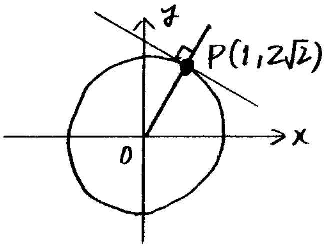
$d<r$ $\qquad$ $d=r$ $\qquad$ $d>r$

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $P(a, b)$ におけるこの円の接線の方程式は $ax+by=r^2$

$\boxed{1}$ 円 $x^2+y^2=9$ 上の点 $P(1, 2\sqrt{2})$ における接線の方程式を求めよ。

$x+2\sqrt{2}y=9$

($\boxed{別解}$



OPの傾き $=2\sqrt{2}$ だから

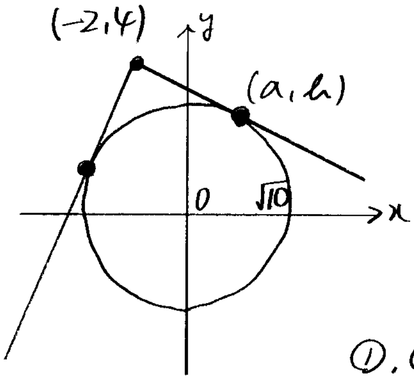
接線の傾きは $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$y-2\sqrt{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-1)$

$\therefore\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$)

$\boxed{2}$ 次の点を通り，与えられた円に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。

点 $(-2,\ 4)$，$x^2+y^2=10$



接点 (a, b) とおく。

接線 $ax+by=10$

$(-2,4)$ を代入して $-2a+4b=10$

$\therefore\ -a+2b=5\ \cdots①$

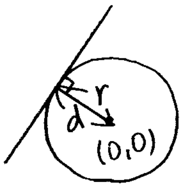
また，(a, b) は円周上の点だから

$a^2+b^2=10\ \cdots②$

①，② より $(a, b)=(-3, 1), (1, 3)$

よって，$\begin{cases}接線\ -3x+y=10\\ 接点\ (-3, 1)\end{cases}$ または $\begin{cases}接線\ x+3y=10\\ 接点\ (1, 3)\end{cases}$

$\boxed{別解}$

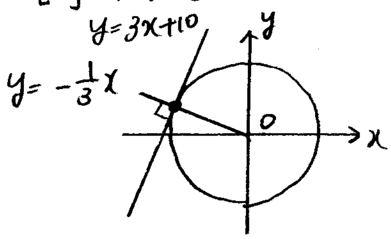


中心 $(0,0)$，接線 $y-4=m(x+2)$ つまり $mx-y+2m+4=0$

$\boxed{d=r}$ より $d=\dfrac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$ $\quad\therefore\ |2m+4|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

2乗して $(2m+4)^2=10(m^2+1)$ これをといて $m=3,\ -\dfrac{1}{3}$

[1] $m=3$ のとき

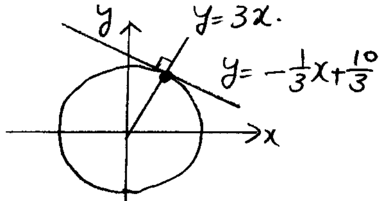


$\begin{cases}y=3x+10\\ y=-\frac{1}{3}x\end{cases}$

これをといて

接点 $(-3, 1)$

[2] $m=-\dfrac{1}{3}$ のとき



$\begin{cases}y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}\\ y=3x\end{cases}$

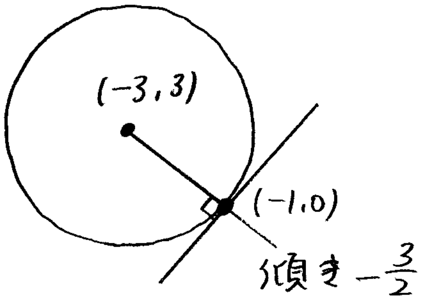
これをといて

接点 $(1, 3)$

[1][2] より $\begin{cases}接線\ y=3x+10\\ 接点\ (-3, 1)\end{cases}$ または $\begin{cases}接線\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}\\ 接点\ (1, 3)\end{cases}$

3 円 $x^2+y^2+6x-6y+5=0$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

$(x+3)^2+(y-3)^2=13$



求める接線の傾きは $\frac{2}{3}$

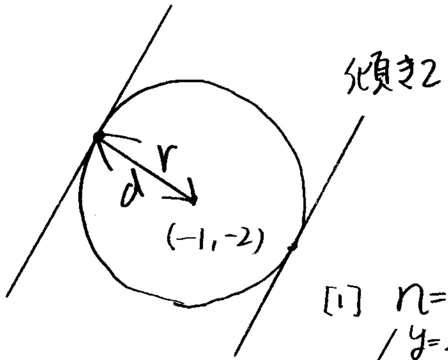
$y=\frac{2}{3}(x+1)$

$y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$

4 次の円の接線の方程式と，その接点の座標を求めよ。

(1) 円 $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ の接線で，傾きが 2 のもの

$(x+1)^2+(y+2)^2=9$　　$y=2x+n$ とおく。

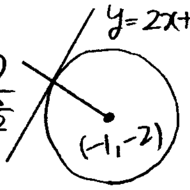


中心 $(-1,-2)$，接線 $2x-y+n=0$

$\boxed{d=r}$ より $\dfrac{|-2+2+n|}{\sqrt{5}}=3$

$|n|=3\sqrt{5}$　　$\therefore\ n=\pm3\sqrt{5}$

[1] $n=3\sqrt{5}$ のとき



$y+2=-\frac{1}{2}(x+1)$

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

$\begin{cases} y=2x+3\sqrt{5} \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \end{cases}$

接点 $\left(\frac{-5-6\sqrt{5}}{5},\ \frac{-10+3\sqrt{5}}{5}\right)$

[2] $n=-3\sqrt{5}$ のとき

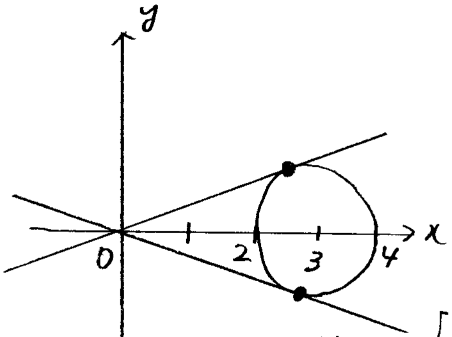
$\begin{cases} y=2x-3\sqrt{5} \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \end{cases}$

接点 $\left(\frac{-5+6\sqrt{5}}{5},\ \frac{-10-3\sqrt{5}}{5}\right)$

[1][2] より $\begin{cases} \text{接線}\ y=2x+3\sqrt{5} \\ \text{接点}\ \left(\frac{-5-6\sqrt{5}}{5},\ \frac{-10+3\sqrt{5}}{5}\right) \end{cases}$ または $\begin{cases} \text{接線}\ y=2x-3\sqrt{5} \\ \text{接点}\ \left(\frac{-5+6\sqrt{5}}{5},\ \frac{-10-3\sqrt{5}}{5}\right) \end{cases}$

(2) 円 $x^2+y^2-6x+8=0$ の接線で，原点を通るもの

$(x-3)^2+y^2=1$　　$y=mx$ とおく。



中心 $(3,0)$，接線 $mx-y=0$

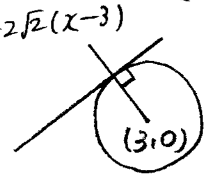
$\boxed{d=r}$ より $\dfrac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$　$\therefore\ |3m|=\sqrt{m^2+1}$

2乗して $9m^2=m^2+1$

$m^2=\frac{1}{8}$　　$\therefore\ m=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

[1] $m=\frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき

$y=-2\sqrt{2}(x-3)$



$\begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{4}x \\ y=-2\sqrt{2}x+6\sqrt{2} \end{cases}$

接点 $\left(\frac{8}{3},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

[2] $m=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき

図形の対称性より

接点 $\left(\frac{8}{3},\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

[1] [2] より $\begin{cases} \text{接線}\ y=\frac{\sqrt{2}}{4}x \\ \text{接点}\ \left(\frac{8}{3},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \end{cases}$ または $\begin{cases} \text{接線}\ y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x \\ \text{接点}\ \left(\frac{8}{3},\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \end{cases}$