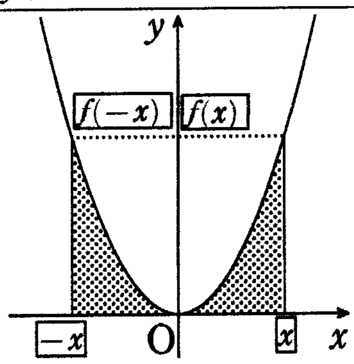
知っ得「偶関数と奇関数」

＜１＞　偶関数と奇関数

①　偶関数（例 $y=x^2$ 、 $y=x^4$ 、 $y=3$ など）

$f(-x)=f(x)$ となる関数
（y 軸に関して対称なグラフ）

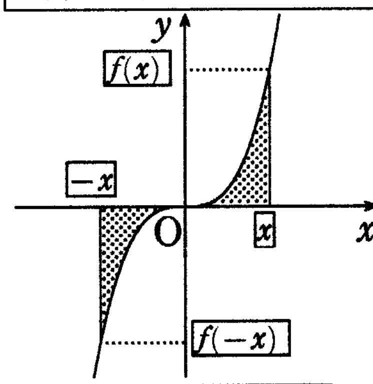


$f(x)$ が偶関数のとき

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

②　奇関数（例 $y=x$ 、 $y=x^3$ など）

$f(-x)=-f(x)$ となる関数
（原点に関して対称なグラフ）



$f(x)$ が奇関数のとき

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

例題　次の定積分を求めよ。

$$\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2-6x-1)dx$$

$$= 2\int_0^2 (3x^2-1)dx$$

$$= \int_0^2 (6x^2-2)dx$$

$$= 2\left[x^3\right]_0^2-2\left[x\right]_0^2$$

$$= 2(8-0)-2(2-0)=16-4=\underline{12}$$

＜２＞　定積分の性質

①　$\int_a^a f(x)dx=0$　②　$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$　③　$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

証明　$\int f(x)dx=F(x)+C$ （Cは積分定数）とする。

①　$\int_a^a f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^a=F(a)-F(a)=0$

②　$\int_b^a f(x)dx=\left[F(x)\right]_b^a=F(a)-F(b)=-\{F(b)-F(a)\}=-\left[F(x)\right]_a^b=-\int_a^b f(x)dx$

③　$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^c+\left[F(x)\right]_c^b=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)$

$$=F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b=\int_a^b f(x)dx$$