

剰余の定理

例 $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ を $x+1$ で割ると余りは?

商を $Q(x)$ とおくと

$$\boxed{\text{割られる式} = \text{割る式} \times \text{商} + \text{余り}}$$

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 1 = \underbrace{(x+1)}_{\substack{\uparrow \\ x=-1 \text{ を代入すると消える!!}}} Q(x) + 6$$

$$\begin{array}{r} 2x - 5 \\ x+1 \overline{) 2x^2 - 3x + 1} \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ -5x + 1 \\ \underline{-5x - 5} \\ 6 \end{array}$$

だから、 $P(-1)$ を計算すると「余り」が求まる。

<剰余の定理> 整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの余りは $P(k)$

1 (1) $P(x) = x^3 - 2x + 1$ を $x-2$ で割ったときの余りを求めよ。

$$P(2) = 8 - 4 + 1 = \underline{5}$$

(2) $P(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$ を $x+3$ で割ると 1 余るとき、定数 a の値を求めよ。

$$P(-3) = 1 \text{ だよ}$$

$$-27 + 9a - 9 + 1 = 1$$

$$9a = 36 \quad \therefore \underline{a=4}$$

2 $x^{51} + 1$ を $x^2 - 1$ で割ったときの余りを求めよ。

$$x^{51} + 1 = (x+1)(x-1)Q(x) + ax + b \text{ とおく。}$$

$$x=1 \text{ を代入して } 2 = a + b \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x=-1 \text{ を代入して } 0 = -a + b \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より } 2a = 2 \quad \therefore a = 1, b = 1$$

$$\text{よって 余りは } \underline{x+1}$$

3 整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 5、 $x-3$ で割ると余りが 9 である。 $P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。

$$P(x) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b \text{ とおく。}$$

$$P(2) = 5 \text{ より } 2a + b = 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$P(3) = 9 \text{ より } 3a + b = 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } -a = -4 \quad \therefore a = 4, b = -3$$

$$\text{よって 余りは } \underline{4x-3}$$

4 整式 $P(x)$ を $x^2 - 3x + 2$ で割ると余りが $-x + 4$, $x^2 - 4x + 3$ で割ると余りが $3x$ である。

$P(x)$ を $x^2 - 5x + 6$ で割ったときの余りを求めよ。

$$\begin{cases} P(x) = (x-1)(x-2)Q_1(x) - x + 4 \dots \textcircled{1} \\ P(x) = (x-1)(x-3)Q_2(x) + 3x \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(x) = (x-1)(x-3)Q_2(x) + 3x \dots \textcircled{2} \\ P(x) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b \text{ とおく} \end{cases}$$

$$P(x) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b \text{ とおく}$$

①より $P(2) = 2$ だから $2a + b = 2$

②より $P(3) = 9$ だから $3a + b = 9 \quad \therefore a = 7, b = -12$

よって 余りは $\underline{7x - 12}$

5 整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると余りが $4x - 5$, $x + 2$ で割ると余りが -4 である。このとき、

$P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

$$\begin{cases} P(x) = (x-1)^2 Q_1(x) + 4x - 5 \dots \textcircled{1} \\ P(x) = (x+2) Q_2(x) - 4 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(x) = (x-1)^2 Q_1(x) + 4x - 5 \dots \textcircled{1} \\ P(x) = (x+2) Q_2(x) - 4 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + ax^2 + bx + c \text{ とおく}$$

②より $P(-2) = -4$ だから $4a - 2b + c = -4 \dots \textcircled{3}$

$$\begin{array}{r} a \\ x^2 - 2x + 1 \overline{) ax^2 + bx + c} \\ \underline{ax^2 - 2ax + a} \\ (2a + b)x + (c - a) \end{array}$$

よって $P(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + a(x-1)^2 + (2a+b)x + (c-a)$
 $= (x-1)^2 \{ (x+2)Q(x) + a \} + (2a+b)x + (c-a)$

LT=かゝる? $2a + b = 4 \dots \textcircled{4} \quad c - a = -5 \dots \textcircled{5}$

③~⑤より $a = 1, b = 2, c = -4$ 中に 余りは $\underline{x^2 + 2x - 4}$

別解 $P(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + a(x-1)^2 + 4x - 5$ とおく
 $P(-2) = -4$ だから $9a - 13 = -4 \quad \therefore a = 1$
 余りは $(x-1)^2 + 4x - 5 = \underline{x^2 + 2x - 4}$