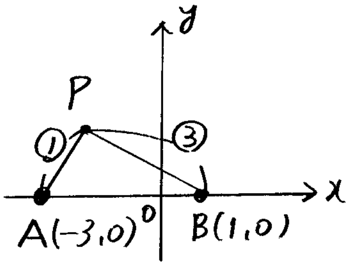
軌跡と方程式

1 2点 A(−3, 0), B(1, 0) からの距離の比が 1:3 である点 P の軌跡を求めよ。



$P(x, y)$ とおく。

$AP : BP = 1 : 3$

$3AP = BP$

$3\sqrt{(x+3)^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$9\{(x+3)^2+y^2\} = (x-1)^2+y^2$

$9(x^2+6x+9+y^2) = x^2-2x+1+y^2$

$8x^2+8y^2+56x+80=0$

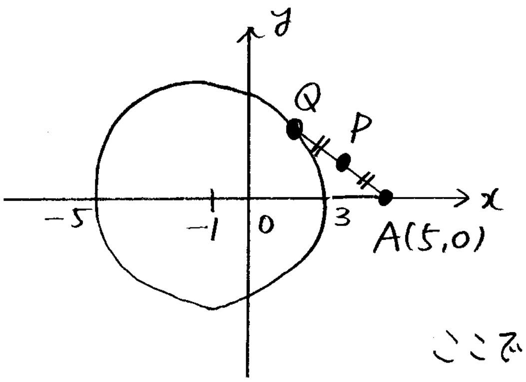
$x^2+y^2+7x+10=0$

$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+y^2+10=0$

$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$

よって 中心 $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$，半径 $\frac{3}{2}$ の円 //

2 点 A(5, 0) と円 $(x+1)^2+y^2=16$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ。



$P(x, y)$, $Q(s, t)$ とおく。

$$\begin{cases} x = \frac{s+5}{2} \\ y = \frac{t}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2x-5 \\ t = 2y \end{cases}$$

ここで $(s+1)^2+t^2=16$ だから

$(2x-4)^2+(2y)^2=16$

よって $(x-2)^2+y^2=4$

ゆえに、中心 $(2, 0)$，半径 2 の円 //

3 m が実数全体を動くとき，放物線 $y=x^2-2mx+1$ の頂点Pの軌跡を求めよ。

$y=(x-m)^2-m^2+1$

頂点 $(m, -m^2+1)$

$\begin{cases} x=m \\ y=-m^2+1 \end{cases}$

mを消去して

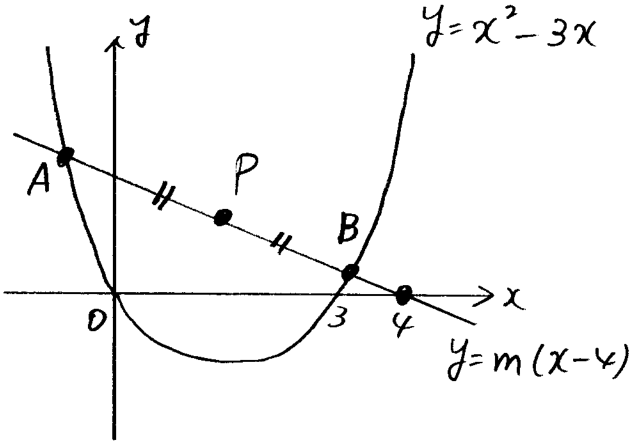
$y=-x^2+1$

よって 放物線 $y=-x^2+1$

4 放物線 $y=x^2-3x$ と直線 $y=m(x-4)$ は異なる2点A，Bで交わっている。

（1） 定数 m の値の範囲を求めよ。

（2） m の値が変化するとき，線分ABの中点Pの軌跡を求めよ。



解 (1) $x^2-3x=m(x-4)$

$x^2-(m+3)x+4m=0 \quad \cdots(*)$

$D=(m+3)^2-16m>0$

$m^2-10m+9>0$

$(m-1)(m-9)>0$

$m<1,\ 9<m$

(2) $P(x, y)$, $A(\alpha, m(\alpha-4))$, $B(\beta, m(\beta-4))$ とおく。

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ y=\dfrac{m(\alpha-4)+m(\beta-4)}{2}=\dfrac{m(\alpha+\beta)-8m}{2} \end{cases}$$

(*) より $\alpha+\beta=m+3$ だから

$$\begin{cases} x=\dfrac{m+3}{2} \\ y=\dfrac{m(m+3)-8m}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m=2x-3 \\ y=\dfrac{m^2-5m}{2} \end{cases}$$

よって $y=\dfrac{(2x-3)^2-5(2x-3)}{2}=2x^2-11x+12$

ここで (1) より $m<1,\ 9<m \iff 2x-3<1,\ 9<2x-3$

$\iff x<2,\ 6<x$

ゆえに、求める軌跡は、放物線 $y=2x^2-11x+12\ (x<2,\ 6<x)$