

高次方程式

- 1 3次方程式 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ が $3 + 2i$ を解にもつとき、実数の定数 a, b の値と他の解を求めよ。

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a \neq 0) \quad \Rightarrow \quad x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

<3次方程式の解と係数の関係>

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α, β, γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

- 1 3次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $3+2i$ を解にもつとき、実数の定数 a, b の値と他の解を求めよ。(前問と同一)

- 2 3次方程式 $x^3+3x^2+(a-4)x-a=0$ が2重解をもつとき、定数 a の値を求めよ。

- 3 1の3乗根のうち、虚数であるものの1つを ω とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\omega^6 + \omega^3 + 1$

(2) $\omega^8 + \omega^4 + 1$

(3) $\omega^{200} + \omega^{100}$