1　3 次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $3+2i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

解①　$(3+2i)^3-5(3+2i)^2+a(3+2i)+b=0$

$27+3\cdot3^2\cdot2i+3\cdot3\cdot(-4)-8i-5(9+12i-4)+3a+2ai+b=0$

$27+54i-36-8i-5(5+12i)+3a+2ai+b=0$

$(3a+b-34)+(2a-14)i=0$

よって $\begin{cases}3a+b-34=0\\2a-14=0\end{cases}$　$\therefore a=7,\ b=13$

このとき　$x^3-5x^2+7x+13=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 7 & 13 \\ & & -1 & 6 & -13 \\ \hline & 1 & -6 & 13 & 0 \end{array}$$

$(x+1)(x^2-6x+13)=0$

$x=-1,\ 3\pm2i$

よって　$a=7,\ b=13$，他の解は $-1,\ 3-2i$

解②　$x=3+2i,\ 3-2i$ を解にもつ。

和 6　積 13　$\Rightarrow x^2-6x+13=0$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2-6x+13 \,\big)\, x^3-5x^2+ax+b \\ x^3-6x^2+13x \\ \hline x^2+(a-13)x+b \\ x^2-6x+13 \\ \hline (a-7)x+(b-13) \end{array}$$

$(a-7)x+(b-13)=0$

よって　$a=7,\ b=13$，他の解は $-1,\ 3-2i$

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0 \quad \Longrightarrow \quad x^3\underline{-(\alpha+\beta+\gamma)}x^2\underline{+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}x\underline{-\alpha\beta\gamma}=0$

$ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0) \quad \Longrightarrow \quad x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}=0$

<3次方程式の解と係数の関係>

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α, β, γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

$\boxed{1}$ 3次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $3+2i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。（前問と同一）

$\left(\begin{array}{l}\beta=3+2i\\ \gamma=3-2i\end{array} とおく。\right)$ $\beta+\gamma=6$. $\beta\gamma=13$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=5\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a\\ (\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma=a)\\ \alpha\beta\gamma=-b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+6=5\\ 6\alpha+13=a\\ 13\alpha=-b\end{cases}$$

$\therefore\ \alpha=-1,\ a=7,\ b=13$

よって $\underline{a=7,\ b=13,\ 他の解\ -1,\ 3-2i}$ //

$\boxed{2}$ 3次方程式 $x^3+3x^2+(a-4)x-a=0$ が2重解をもつとき，定数 a の値を求めよ。

$(x-1)(x^2+4x+a)=0$

$\lfloor 1$	1	3	$a-4$	$-a$
		1	4	a
	1	4	a	$\lfloor 0$

[1] $x^2+4x+a=0$ で $D=0$ のとき

$D/4=4-a=0 \quad \therefore a=4$

このとき $(x-1)(x+2)^2=0$ となり 2重解 $x=-2$ をもつ。

[2] $x^2+4x+a=0$ に $x=1$ を代入して

$5+a=0 \quad \therefore a=-5$

このとき $(x-1)^2(x+5)=0$ となり 2重解 $x=1$ をもつ。

[1] [2] より $\underline{a=4,\ -5}$ //

$\boxed{3}$ 1の3乗根のうち，虚数であるものの1つを ω とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\omega^6+\omega^3+1$ (2) $\omega^8+\omega^4+1$ (3) $\omega^{200}+\omega^{100}$

$$\left(\begin{array}{l}\omega^3=1 \cdots ①\\ (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0\\ \omega\neq 1 より\\ \omega^2+\omega+1=0 \cdots ②\end{array}\right)$$

(1) $\omega^6+\omega^3+1=(\omega^3)^2+\omega^3+1$

$=1+1+1=\underline{3}$ //

(2) $\omega^8+\omega^4+1=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1$

$=\omega^2+\omega+1=\underline{0}$ //

(3) $\omega^{200}+\omega^{100}=(\omega^3)^{66}\cdot\omega^2+(\omega^3)^{33}\cdot\omega$

$=\omega^2+\omega=\underline{-1}$ //