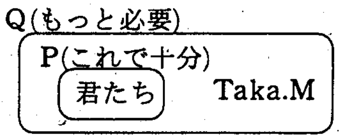
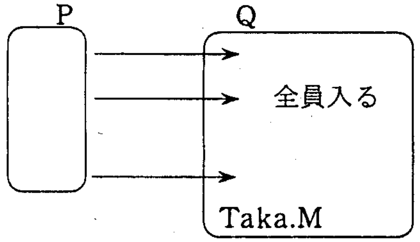
# 命題（1）　真偽判定法と必要条件・十分条件

## ＜真偽判定法＞




例　命題　「K高の生徒（P） ⟹ 北海道民（Q）」

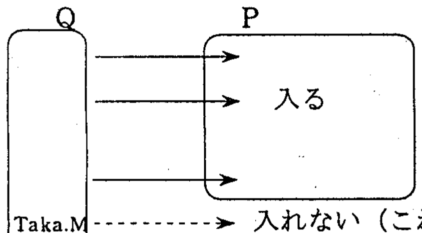
$P \subset Q$ なので、$P \Longrightarrow Q$ は「真」である。




**P ⟹ Q が「真」**
**十　　要**

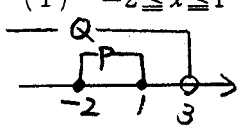
例　命題　「北海道民（Q） ⟹ K高の生徒（P）」

$Q \Longrightarrow P$ は「偽」である。反例は「Taka.Mなど」




1　次の命題の真偽を調べよ。また、偽であるときは反例をあげよ。

（1）P $-2 \leqq x \leqq 1 \Longrightarrow$ Q $x<3$




P⊂Qより
真

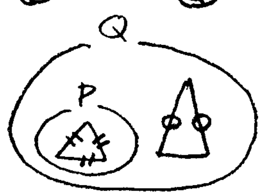
（2）$x^2=9 \Longrightarrow$ Q $x=3$

P $x=\pm 3$

P
Q 3　−3

P⊃Qより
偽（反例：$x=-3$）

（3）正三角形は二等辺三角形である。
（P：正三角形、Q：二等辺三角形）




P⊂Qより
真

2　次の□に当てはまるものを下の ⓪ ～ ③ から1つずつ選べ。ただし、$a$、$b$、$c$、$x$、$y$は実数とする。

| | |
|---|---|
| ⓪ 必要十分条件である | ① 必要条件であるが十分条件ではない |
| ② 十分条件であるが必要条件ではない | ③ 必要条件でも十分条件でもない |

（1）$(a-1)(b-1)=0$ は、$a=1$ かつ $b=1$ であるための□。

$(a-1)(b-1)=0 \quad \underset{○}{\overset{\times\ (反例：a=1かつb=2)}{\rightleftarrows}} \quad a=1$ かつ $b=1$

必要条件 ①

（2）$x+y \geqq 2$ は、$x$、$y$の少なくとも一方が2以上であるための□。

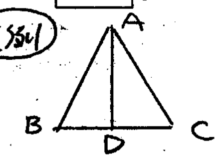
$x+y \geqq 2 \quad \underset{\times\ (x=2かつy=-5)}{\overset{\times\ (x=1かつy=1)}{\rightleftarrows}} \quad x$、$y$の少なくとも一方が2以上

どちらでもない ③

（3）△ABCにおいて、辺BCの中点をDとする。
△ABCが正三角形であることは、AD⊥BCであるための□。

△ABCが正三角形 $\underset{\times}{\overset{○}{\rightleftarrows}}$ AD⊥BC

反例




十分条件 ②

（4）$ac=bc$ は、$a=b$ であるための□。

$ac=bc \quad \underset{○}{\overset{\times\ (a=1,\ b=2,\ c=0)}{\rightleftarrows}} \quad a=b$

必要条件 ①

（5）$x>y$ は、$x^2>y^2$ であるための□。

$x>y \quad \underset{\times\ (x=-3,\ y=2)}{\overset{\times\ (x=1,\ y=-3)}{\rightleftarrows}} \quad x^2>y^2$

どちらでもない ③

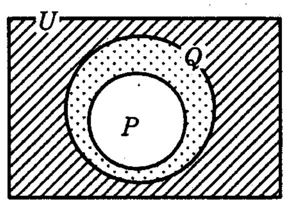
＜命題の逆、裏、対偶＞

$$\begin{tikzcd} p \Rightarrow q \arrow[r, dash, "逆"] \arrow[d, dash, "裏"'] \arrow[dr, dash] & q \Rightarrow p \arrow[d, dash, "裏"] \arrow[dl, dash] \arrow[dl, phantom, "対偶"] \\ \overline{p} \Rightarrow \overline{q} \arrow[r, dash, "逆"'] & \overline{q} \Rightarrow \overline{p} \end{tikzcd}$$

ド・モルガンの法則
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$P \subset Q \iff \overline{Q} \subset \overline{P}$ が成り立つから、

命題 $P \Longrightarrow Q$ と対偶 $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ の真偽は一致する。



真偽の判定がムズカシイときは、対偶を利用する。

3　次の命題の真偽を調べよ。
$x+y \leqq 2$ または $xy \leqq 1 \Longrightarrow x \leqq 1$ または $y \leqq 1$

解　対偶
「$x>1$ かつ $y>1$」$\Rightarrow$「$x+y>2$ かつ $xy>1$」
は真。
よって. もとの命題も真

4　基礎編［6］

次の $\boxed{\phantom{0}}$ に当てはまるものを下の ⓪ ～ ③ から1つずつ選べ。ただし、$x$、$y$は実数とする。

⓪ 必要十分条件である　① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない　③ 必要条件でも十分条件でもない

(1)　$x=-1$ は、$x^2-x-2=0$ であるための $\boxed{\phantom{0}}$。

$x=2, -1$

$\underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$

十分条件 ②

(2)　四角形 $ABCD$ が長方形であることは、四角形 $ABCD$ が正方形であるための $\boxed{\phantom{0}}$。

長方形 $\underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ 正方形

必要条件 ①

(3)　$|3x-2|>4$ は、$x \geqq 2$ であるための $\boxed{\phantom{0}}$。

$3x-2<-4$, $4<3x-2$
$3x<-2$, $6<3x$
$x<-\frac{2}{3}$, $2<x$ $\underset{\times}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ $x \geqq 2$

どちらでもない
③

(4)　$(x-1)(y-1)=0$ は、$x$、$y$の少なくとも一方が1であるための $\boxed{\phantom{0}}$。

$\underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$

必要十分条件 ⓪