

# 整数 (2) 1次不定方程式①

1 等式  $4x + 3y = 60$  を満たす 自然数 の組  $(x, y)$  をすべて求めよ。

$$4x = 3(20 - y)$$

$$x \text{ は } 3 \text{ の倍数だから } 1 \leq x \leq 14$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ or } 6 \text{ or } 9 \text{ or } 12$$

$$(x, y) = (3, 16), (6, 12), (9, 8), (12, 4)$$

## 例題1 [基礎編 4.2]

方程式  $7x + 13y = 2$  の整数解をすべて求めよ。

$$7x + 13y = 2$$

$$\rightarrow 7 \cdot 4 + 13 \cdot (-2) = 2$$

$$7(x-4) + 13(y+2) = 0$$

$$7(x-4) = -13(y+2)$$

$$x-4 = 13k$$

$$y+2 = -7k$$

一般解は

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 13k + 4 \\ y = -7k - 2 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ここで} \\ \text{4が素因数が入る} \end{array} \right)$$

$$\text{または} \begin{cases} x = -13k + 4 \\ y = 7k - 2 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{または} \\ \text{ } \end{array} \right)$$

2 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)  $5x - 3y = 1$

$$5x - 3y = 1$$

$$\rightarrow 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$$

$$5(x-2) - 3(y-3) = 0$$

$$5(x-2) = 3(y-3)$$

$$\begin{cases} x-2 = 3k \\ y-3 = 5k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3k + 2 \\ y = 5k + 3 \end{cases} \text{ (kは整数)}$$

(2)  $2x + 3y = 1$

$$2x + 3y = 1$$

$$\rightarrow 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 1$$

$$2(x-2) + 3(y+1) = 0$$

$$2(x-2) = -3(y+1)$$

$$\begin{cases} x-2 = 3k \\ y+1 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3k + 2 \\ y = -2k - 1 \end{cases} \text{ (kは整数)}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{または} \\ \text{ } \end{array} \right) \begin{cases} x = -3k + 2 \\ y = 2k - 1 \end{cases}$$

※対策編 [2.7] に取り組もう!

例題2 6で割ると1余り、11で割ると5余るような自然数のうち、3桁で最小のものを求めよ。

$$N = 6x + 1 = 11y + 5 \quad (x, y \text{ は整数})$$

$$6x - 11y = 4$$

$$\rightarrow) \frac{6 \cdot 8 - 11 \cdot 4 = 4}{6(x-8) - 11(y-4) = 0}$$

$$6(x-8) = 11(y-4)$$

$6x - 11y = 1 \text{ のとき}$	$6x - 11y = 1$
$45 \text{ 割り}$	$6 \cdot 2 - 11 \cdot 1 = 1$
	$6 \cdot 8 - 11 \cdot 4 = 4$

$$\begin{cases} x-8 = 11k \\ y-4 = 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11k + 8 \\ y = 6k + 4 \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$\text{よ?} \cdot N = 6x + 1$$

$$= 6(11k + 8) + 1$$

$$= 66k + 49$$

$$66k + 49 \geq 100 \Leftrightarrow k \geq \frac{51}{66}$$

$$k=1 \text{ のとき } N = 66 + 49$$

$$N = \underline{115}$$

3 [基礎編 4.3]

6で割ると5余り、9で割ると2余る2桁の自然数  $n$  のうち最大のものを求めよ。

$$N = 6x + 5 = 9y + 2$$

$$6x - 9y = -3$$

$$\rightarrow) \frac{6 \cdot 1 - 9 \cdot 1 = -3}{6(x-1) - 9(y-1) = 0}$$

$$6(x-1) - 9(y-1) = 0$$

$$2(x-1) = 3(y-1)$$

$$\begin{cases} x-1 = 3k \\ y-1 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = 2k + 1 \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$\text{よ?} \quad N = 6x + 5$$

$$= 6(3k + 1) + 5$$

$$= 18k + 11$$

$$18k + 11 \leq 99 \Leftrightarrow k \leq \frac{88}{18} \quad (= 4 \frac{8}{9})$$

$$k=4 \text{ のとき } N = 18 \times 4 + 11$$

$$N = \underline{83}$$