

整数 (4) いろいろな方程式の整数解

【例題1】 [基礎編 39 改題]

x, y は自然数とする。方程式 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{4}$ を満たす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

$$4y + 8x = xy$$

$$xy - 8x - 4y = 0$$

$$(x - 4)(y - 8) - 32 = 0$$

$$(x - 4)(y - 8) = 32$$

$x-4$	1	2	4	8	16	32
$y-8$	32	16	8	4	2	1

⇓

x	5	6	8	12	20	36
y	40	24	16	12	10	9

$$(x, y) = (5, 40), (6, 24), (8, 16),$$

$$(12, 12), (20, 10), (36, 9)$$

【1】 等式 $xy + 4x - y = 6$ を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ。

$$(x - 1)(y + 4) + 4 = 6$$

$$(x - 1)(y + 4) = 2$$

$x-1$	1	2	-1	-2
$y+4$	2	1	-2	-1

⇓

x	2	3	0	-1
y	-2	-3	-6	-5

$$(x, y) = (2, -2), (3, -3), (0, -6), (-1, -5)$$

2 $\sqrt{n^2+72}$ が整数となるような自然数 n を求めよ。

$$\sqrt{n^2+72} = A \text{ と } k \leq 0$$

$$n^2+72 = A^2$$

$$A^2 - n^2 = 72$$

$$(A+n)(A-n) = 72$$

< (1) $n^2 = 72$ >

- ① $A+n$ が $A-n$ の偶数 \otimes
 ② $A+n$ と $A-n$ の和は $\textcircled{\text{偶数}}$



$A+n$	36	18	12
$A-n$	2	4	6

$$2n = 34, 14, 6$$

$$n = 17, 7, 3$$

3 [基礎編 40 改題]

自然数 x, y, z が方程式 $x+2y+z = xyz$ を満たしている。ただし、 $x \leq y \leq z$ とする。

(1) 不等式 $xy \leq 4$ が成り立つことを示せ。

$$xyz = x + 2y + z \leq z + 2z + z = 4z$$

$$xyz \leq 4z$$

$$z > 0 \text{ より}$$

$$xy \leq 4$$

(2) 方程式を満たす自然数の組 (x, y, z) をすべて求めよ。

(1) より

$$(x, y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, x), (2, 2)$$

$3+z=z$ 解あり	$5+z=2z$ $z=5$ (適当)	$7+z=3z$ $z=\frac{7}{2}$ (不適)	$9+z=4z$ $z=3$ (不適)	$6+z=4z$ $z=2$ (適当)
----------------	---------------------------	-------------------------------------	---------------------------	---------------------------

よって $(x, y, z) = (1, 2, 5), (2, 2, 2)$

※対策編 [26] に取り組もう!