整数（5）　剰余

1 [基礎編３８抜粋]

a，bを整数とする。aを７で割ると３余り，bを７で割ると４余るとき、次の数を７で割った余りを求めよ。　$a=7m+3$, $b=7n+4$（m, nは整数）

（1）　ab

$=(7m+3)(7n+4)$

$=49mn+28m+21n+12$

$=7(7mn+4m+3n+1)+5$

よって　余り 5

（2）　$a-b$

$=(7m+3)-(7n+4)$

$=7m-7n-1$

$=7m-7n-7+6$

$=7(m-n-1)+6$

余り 6

2　次のことを示せ。

（1）　n を整数とする。n^2を３で割ったときの余りは，０か１である。

$n=3k$, $3k+1$, $3k+2$（kは整数）で分類する。

[1] $n=3k$ のとき　$n^2=9k^2=3(3k^2)$

よって　余り 0

[2] $n=3k+1$ のとき　$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1$

$=3(3k^2+2k)+1$

よって　余り 1

[3] $n=3k+2$ のとき　$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4$

$=3(3k^2+4k+1)+1$

よって　余り 1

[1]〜[3] より n^2を3でわると、余りは 0 or 1 である。

（2）　a、b、c を整数とする。$a^2+b^2=c^2$ のとき、a、bのうち、少なくとも１つは３の倍数である。

<3でわった余り>

n	a^2	b^2	a^2+b^2
$3k+1$	1	1	2
$3k+2$	1	1	2

a, bともに3の倍数でないと仮定する。

(1) より　a^2+b^2を3でわると　余りは2

しかし、c^2を3でわると　余りは 0 or 1 となり矛盾。

よって、a, bの少なくとも一方は 3の倍数である。

3 n が整数のとき、$2n^3+3n^2+n$ は 6 の倍数であることを示せ。

$$2n^3+3n^2+n = n(2n^2+3n+1)$$
$$= n(n+1)(2n+1)$$

連続2整数の積 $n(n+1)$ は 2の倍数 …①

よって 与式が 3の倍数であることを示せばよい。

[1] $n=3k$ のとき n は 3の倍数

[2] $n=3k+1$ のとき

$$2n+1 = 2(3k+1)+1$$
$$= 6k+3 = 3(2k+1)$$ は3の倍数

[3] $n=3k+2$ のとき

$$n+1 = 3k+3 = 3(k+1)$$ は 3の倍数

[1]〜[3] より $n(n+1)(2n+1)$ は 3の倍数 …②

①,② より $n(n+1)(2n+1)$ は 6の倍数である。//

$\boxed{\text{別解}}$ $2n^3+3n^2+n = n(n+1)(2n+1)$

$$= n(n+1)\{(n+2)+(n-1)\}$$
$$= \underline{n(n+1)(n+2)} + \underline{(n-1)n(n+1)}$$

連続3整数の積は 6の倍数だから

与式は 6の倍数である。//

4 次のものを求めよ。

(1) 37^{100} を 6 で割った余り

$$37^{100} = (6\cdot 6+1)^{100}$$
$$= 6K + 1^{100}$$

よって 余り $\underline{1}$ //

(2) 5^{81} を 8 で割った余り

$$5^{81} = (5^2)^{40}\cdot 5^1$$
$$= 25^{40}\cdot 5$$
$$= (8\cdot 3+1)^{40}\cdot 5$$
$$= (8K+1^{40})\cdot 5$$
$$= 40K+5$$

余り $\underline{5}$ //

(2)の別解

5^n	5	5^2	5^3
余り	5	1	5

$81 \div 2 = 40 \ldots 1$

よって 余り 5

(3) 3^{100} を 13 で割った余り

$$(3^3)^{33}\cdot 3 = (13\cdot 2+1)^{33}\cdot 3$$
$$= (13K+1)\cdot 3$$
$$= 39K+3$$

余り $\underline{3}$ //

別解

3^n	3	3^2	3^3	3^4
余り	3	9	1	3

$100 \div 3 = 33 \ldots 1$

よって 余り $\underline{3}$ //

(4) 83^{1234} の一の位の数

$$(8\cdot 10+3)^{1234}$$
$$= 10K + 3^{1234}$$
$$(3^4)^{308}\cdot 3^2$$
$$= (8\cdot 10+1)^{308}\cdot 9$$
$$= (10L+1)\cdot 9$$
$$= 90L+9$$ 余り $\underline{9}$ //

別解

3^n	3	3^2	3^3	3^4	3^5
余り	3	9	7	1	3

$1234 \div 4 = 308 \ldots 2$

よって 余り $\underline{9}$ //