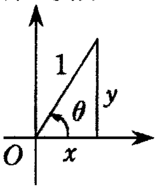
三角関数（1）　三角関数の符号・加法定理

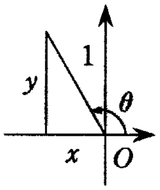
三角関数の値は「符号」が命！！

［1］ 第1象限



$\sin\theta = y$ は「正」
$\cos\theta = x$ は「正」
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ は「正」

［2］ 第2象限



$\sin\theta = y$ は「正」
$\cos\theta = x$ は「負」
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ は「負」

<ポイント>

$\sin\theta$ は「y 座標」（高さ）
$\cos\theta$ は「x 座標」（よこ）
$\tan\theta$ は「傾き」

sin 正 cos 負 tan 負	sin 正 cos 正 tan 正
sin 負 cos 負 tan 正	sin 負 cos 正 tan 負

加法定理

① $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
　しんこつ　こつしん

② $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
　こつこつ　しんしん

③ $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
　いちマーたんたん、たんプラたん

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

※「ひき算」のときは、「符号がすべて逆」

1 $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\beta = -\dfrac{4}{5}\ \left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$ のとき，

（1） $\cos\alpha$ の値を求めよ。また，$\sin\beta$ の値を求めよ。

$\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$

$\cos\alpha > 0$ より

$\cos\alpha = \boxed{\dfrac{4}{5}}$

$\sin^2\beta = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25}$

$\sin\beta > 0$ より

$\sin\beta = \boxed{\dfrac{3}{5}}$

（2） $\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

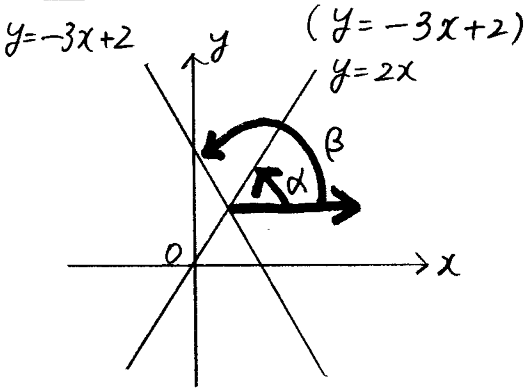
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right) + \dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{5} = -\dfrac{12}{25} + \dfrac{12}{25} = \boxed{0}$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right) + \dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5} = -\dfrac{16}{25} + \dfrac{9}{25} = \boxed{-\dfrac{7}{25}}$

2 2直線 $y=2x$，$3x+y-2=0$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。



$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = -3$ とおく。

$\tan(\beta-\alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$

$= \dfrac{-3-2}{1+(-3)\times 2} = \dfrac{-5}{-5} = 1$

$0<\beta-\alpha<\pi$ として，$\beta-\alpha = 45^\circ$

$\therefore\ \theta = 45^\circ$

例題1　$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ とする。$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta+\cos\theta$ の値を求めよ。

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+2\cdot\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ より $\sin\theta<0$，$\cos\theta<0$ つまり $\sin\theta+\cos\theta<0$

よって $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\boxed{-\frac{\sqrt{6}}{2}}$

3　$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする。$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\sin\theta-\cos\theta$　(3) $\sin\theta$，$\cos\theta$

解　(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$$
$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$$
$$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{8}{9}\quad\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\boxed{-\frac{4}{9}}$$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$$=1-2\times\left(-\frac{4}{9}\right)$$
$$=1+\frac{8}{9}=\frac{17}{9}$$

ここで (1) より $\sin\theta\cos\theta<0$ だから θ は鈍角であり

$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$ つまり $\sin\theta-\cos\theta>0$

よって $\sin\theta-\cos\theta=\boxed{\frac{\sqrt{17}}{3}}$

(3)
$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3} & \cdots①\\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{3} & \cdots②\end{cases}$$

①+② より $2\sin\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{3}$　$\therefore\ \sin\theta=\boxed{\frac{1+\sqrt{17}}{6}}$

①−② より $2\cos\theta=\frac{1-\sqrt{17}}{3}$　$\therefore\ \cos\theta=\boxed{\frac{1-\sqrt{17}}{6}}$