三角関数（2）　２倍角の公式

２倍角の公式は「加法定理」をイメージして覚える！！

① $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	しんこつこつしん	← $\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$
② $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	こつこつしんしん	← $\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$
$= 2\cos^2\alpha - 1$	「こつこつ」は左	← $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$
$= 1 - 2\sin^2\alpha$	「しんしん」は右	← $\cos 2\alpha = (1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha$
③ $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	いちマーたんたん、たんプラたん	← $\tan(\alpha+\alpha)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$

例題１　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $2\cos 2x = 4\sin x - 1$ を解け。

$$2(1-2\sin^2 x) = 4\sin x - 1$$
$$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$$
$$(2\sin x + 3)(2\sin x - 1) = 0$$
$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より $\sin x = \dfrac{1}{2}$

よって $\boxed{x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

1　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$

$$2\cos^2 x - 1 - 3\cos x + 2 = 0$$
$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$
$$(2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$$
$$\cos x = \frac{1}{2},\ 1$$
$$\boxed{x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ 0}$$

(2)　$\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$

$$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x = 0$$
$$\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$$
$$\cos x = 0,\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\boxed{x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi}$$

$\boxed{例題2}$ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos 2x < -3\cos x + 1$ を解け。

$2\cos^2 x - 1 < -3\cos x + 1$

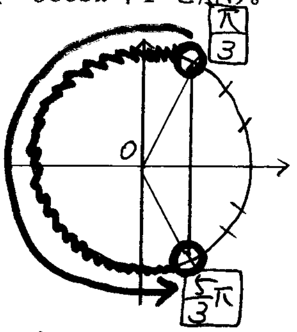
$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$

$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) < 0$

$-2 < \cos x < \frac{1}{2}$

$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ だから $\cos x < \frac{1}{2}$

よって $\boxed{\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi}$



$\boxed{補足}$

$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) < 0$

$\left(\begin{array}{l} -1 \leqq \cos x \leqq 1 \text{ より} \\ \cos x + 2 > 0 \end{array}\right)$

よって $2\cos x - 1 < 0$

$\cos x < \frac{1}{2}$

としてもよい。

$\boxed{2}$ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $2\cos 2x + 8\sin x - 5 \leqq 0$

$2(1 - 2\sin^2 x) + 8\sin x - 5 \leqq 0$

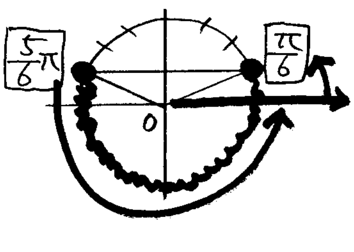
$4\sin^2 x - 8\sin x + 3 \geqq 0$

$(2\sin x - 3)(2\sin x - 1) \geqq 0$ …(*)

$\sin x \leqq \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2} \leqq \sin x$

ここで $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ だから

$\sin x \leqq \frac{1}{2}$



よって

$\boxed{0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi \leqq x < 2\pi}$

($\boxed{補足}$ (*)で，$2\sin x - 3 < 0$ だから $2\sin x - 1 \leqq 0$ ∴ $\sin x \leqq \frac{1}{2}$ としてよい。)

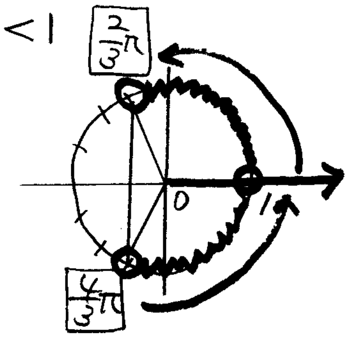
(2) $\cos 2x < \cos x$

$2\cos^2 x - 1 < \cos x$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 < 0$

$(\cos x - 1)(2\cos x + 1) < 0$ …(*)

$-\frac{1}{2} < \cos x < 1$



よって

$\boxed{0 < x < \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi}$

($\boxed{注意}$ (*)には等号がないので $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ であるから $\cos x \neq 1$ かつ $2\cos x + 1 > 0$ となる。)

$\boxed{例題2}$ 関数 $y = 2\sin x - \cos 2x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

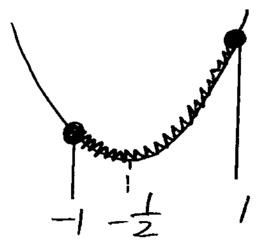
$y = 2\sin x - (1 - 2\sin^2 x)$

$= 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$

$t = \sin x$ とおく。 $-1 \leqq t \leqq 1$ …①

$y = 2t^2 + 2t - 1$

$= 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$



Max 3 ($t = 1$ つまり $x = \frac{\pi}{2}$ のとき)

Min $-\frac{3}{2}$ ($t = -\frac{1}{2}$ つまり $x = -\frac{\pi}{6}$ のとき)