三角関数の合成

$P(a\,,b)$ を用意する。

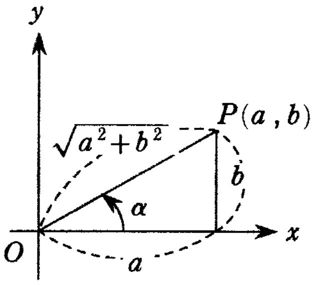
$a\sin\theta + b\cos\theta$

$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\cdot\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

OPの長さ　　$\cos\alpha$　　$\sin\alpha$

$=\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$　$\left(\text{ただし}, \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

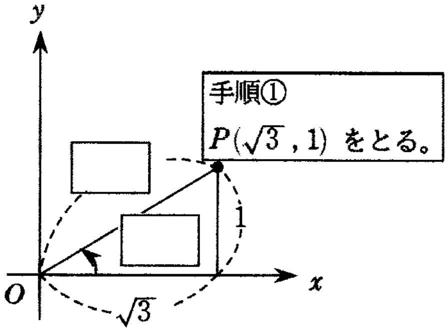


以上の原理を利用して、実際は次のように簡略的に解く。

例　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=\boxed{}\sin\left(\theta+\boxed{}\right)$

手順②
OPの長さを求める。

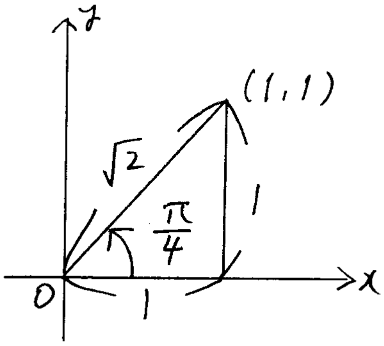
手順③
OPが x 軸から回転した角を求める。（正 or 負）



例題 1　次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

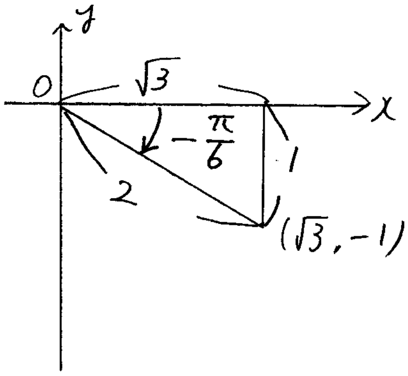
(1)　$\sin\theta+\cos\theta$

$=\boxed{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}$



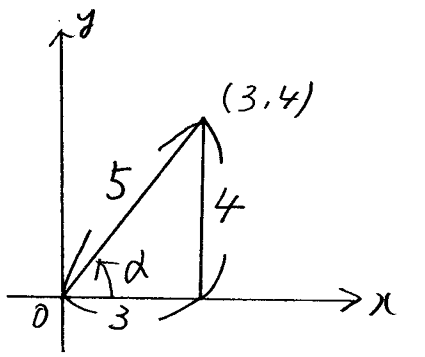
(2)　$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$

$=\boxed{2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)}$



(3)　$3\sin\theta+4\cos\theta$

$=\boxed{\begin{array}{l}5\sin(\theta+\alpha)\\ \left(\text{ただし}, \cos\alpha=\dfrac{3}{5}, \sin\alpha=\dfrac{4}{5}\right)\end{array}}$



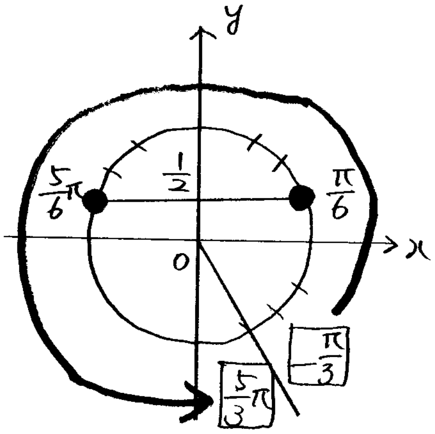
$\boxed{\text{例題2}}$ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ を解け。

$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

角の変域

$-\frac{\pi}{3} \leqq x - \frac{\pi}{3} < 2\pi - \frac{\pi}{3}$



よって　$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi}$

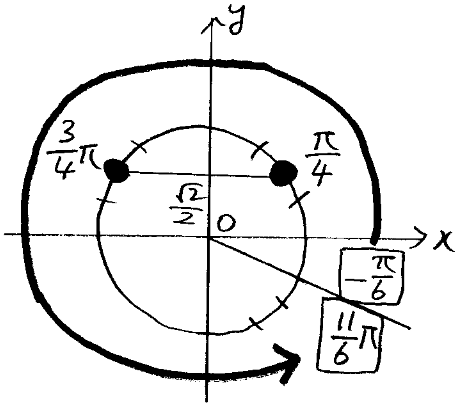
$\boxed{1}$ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$ を解け。

$2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

角の変域

$-\frac{\pi}{6} \leqq x - \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{\pi}{6}$



よって　$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

$\boxed{x = \frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi}$

$\boxed{\text{発展}}$ cos　に合成する

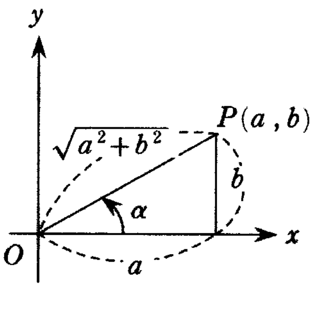
$\boxed{P(a,b)\text{を用意する。}}$

$a\cos\theta + b\sin\theta$

$= \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\boxed{OP\text{の長さ}}}\left(\cos\theta \cdot \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\boxed{\cos\alpha}} + \sin\theta \cdot \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\boxed{\sin\alpha}}\right)$

$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha)$

$= \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\theta - \alpha)$



以上、共通テストを意識して「太郎と花子」対策でした。