

三角関数 (5) 半角の公式

2倍角の公式 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ を変形して

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \quad 2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \Rightarrow \frac{2\sin^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

半角の公式 ※「次数下げ」の道具です。

① $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ② $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ③ $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

※教科書では、「半角」を $\frac{\alpha}{2}$ で表現するために、上記の α を $\frac{\alpha}{2}$ に置き換えて

① $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ ② $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ ③ $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$

としている。問題の設定に合わせて使い分けてください。

例題1 $f(\theta) = \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + 2\cos^2 \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値と最小値を求めよ。

$$\begin{aligned} f(\theta) = y &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\theta + 2 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta + 2 + 2\cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} (\sin 2\theta + \cos 2\theta + 3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \sin(2\theta + \frac{\pi}{4}) + \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2\theta + \frac{\pi}{4}) + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

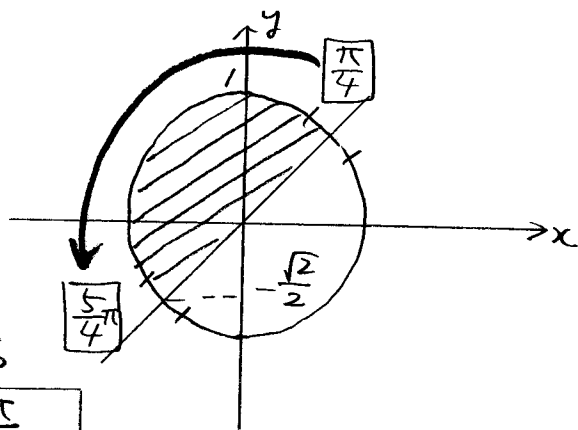
角の変域

$$\frac{\pi}{4} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(2\theta + \frac{\pi}{4}) \leq 1 \text{ 従って}$$

Max $\frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ $\left(\begin{array}{l} 2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} \end{array} \right)$

Min 1 $\left(\begin{array}{l} 2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \\ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right)$



1 関数 $f(\theta) = 8\sqrt{3}\cos^2\theta + 6\sin\theta\cos\theta + 2\sqrt{3}\sin^2\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) の最大値と最小値を求めよ。

$$f(\theta) = y = 8\sqrt{3} \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 3\sin 2\theta + 2\sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$= 4\sqrt{3}(1 + \cos 2\theta) + 3\sin 2\theta + \sqrt{3}(1 - \cos 2\theta)$$

$$= 3\sin 2\theta + 3\sqrt{3}\cos 2\theta + 5\sqrt{3}$$

$$= 3(\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta) + 5\sqrt{3}$$

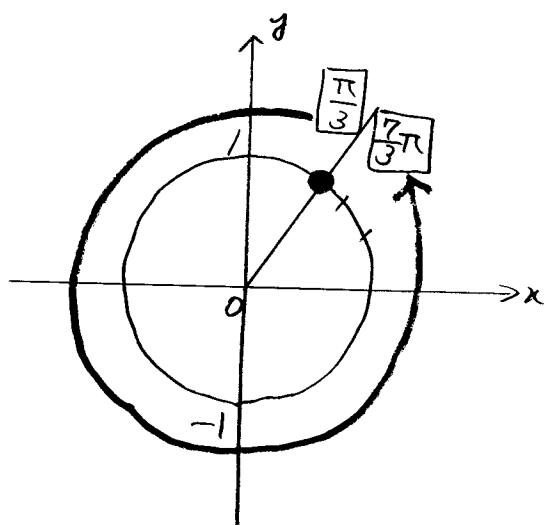
$$= 3 \times 2 \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 5\sqrt{3}$$

$$= 6 \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 5\sqrt{3}$$

角の変域

$$\frac{\pi}{3} \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$-1 \leq \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \text{ 従って}$$



$$\text{Max } 6 + 5\sqrt{3} \quad \left(\begin{array}{l} 2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \\ \text{つまり } \theta = \frac{\pi}{12} \end{array} \right)$$

$$\text{Min } -6 + 5\sqrt{3} \quad \left(\begin{array}{l} 2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi \\ \text{つまり } \theta = \frac{7}{12}\pi \end{array} \right)$$