単元テスト模擬問題（三角関数）数学研究（文型）　　　　組　　番　氏名

1 三角関数（1）プリントより

α は鋭角，β は鈍角とする。$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos\beta=-\frac{2}{5}$ のとき $\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。(8点)

$\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

$\cos\alpha>0$ より　$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin^2\beta = 1-\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$

$\sin\beta>0$ より　$\sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{5}$

① $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}$

$= \boxed{\frac{-2-2\sqrt{42}}{15}}$ $\left(= -\frac{2+2\sqrt{42}}{15}\right)$

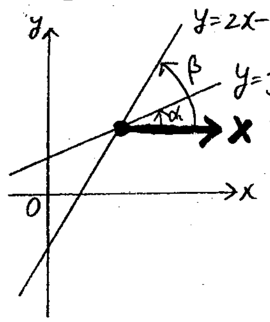
② $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}$

$= \boxed{\frac{-4\sqrt{2}-\sqrt{21}}{15}}$ $\left(= -\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}\right)$

2 三角関数（1）プリントより

2直線 $2x-y-1=0$，$x-3y+3=0$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。(8点)



$\tan\alpha = \frac{1}{3}$，$\tan\beta = 2$ とする。

$\tan(\beta-\alpha)$

$= \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$= \frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{2}{3}} = 1$

$0<\beta-\alpha<\pi$ より　$\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$

よって　$\boxed{\theta=\frac{\pi}{4}}$

3 三角関数（2）プリントより

θ の動径が第3象限にあり，$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta+\cos\theta$ の値を求めよ。(8点)

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1+2\sin\theta\cos\theta$

$= 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$\sin\theta<0$，$\cos\theta<0$ より　$\sin\theta+\cos\theta<0$

よって　$\sin\theta+\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{\sqrt{15}}{3}}$

4 三角関数（2）プリントより

$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。(各8点)

（1）$\sin 2x=\sqrt{2}\sin x$

$2\sin x\cos x - \sqrt{2}\sin x = 0$

$\sin x(2\cos x-\sqrt{2})=0$

$\sin x=0$，$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{x=0,\ \pi,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi}$

（2）$\cos 2x=3\cos x-2$

$2\cos^2 x-1 = 3\cos x-2$

$2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

$(\cos x-1)(2\cos x-1)=0$

$\cos x=1,\ \frac{1}{2}$

$\boxed{x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi}$

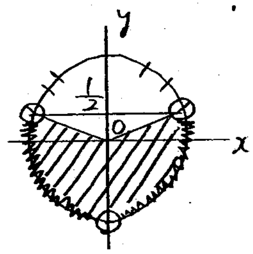
（3）$\cos 2x>\sin x$

$1-2\sin^2 x>\sin x$

$2\sin^2 x+\sin x-1<0$

$(\sin x+1)(2\sin x-1)<0$

$-1<\sin x<\frac{1}{2}$



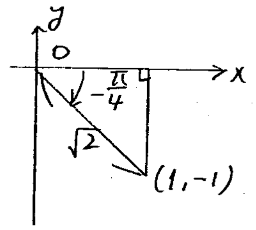
$\boxed{0\leqq x<\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<x<2\pi}$

5 三角関数（3）プリントより

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha\leqq\pi$ とする。(各4点)

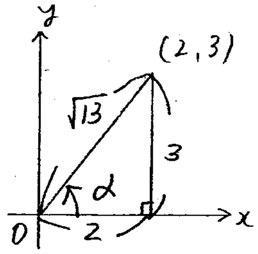
（1）$\sin\theta-\cos\theta$

$=\boxed{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$



（2）$2\sin\theta+3\cos\theta$

$=\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)\\ \text{ただし}\\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}},\ \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}\end{array}}$



6 三角関数（3）（4）プリントより

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。(各8点)

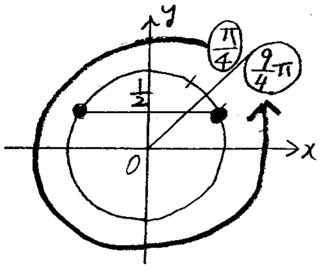
（1） $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

角の変域

$\boxed{\frac{\pi}{4} \leqq x+\frac{\pi}{4} < 2\pi+\frac{\pi}{4}}$



よって $x+\frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

$\therefore \boxed{x = \frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi}$

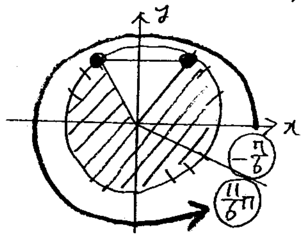
（2） $\sqrt{3}\sin x - \cos x \leqq \sqrt{3}$

$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leqq \sqrt{3}$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$

角の変域

$\boxed{-\frac{\pi}{6} \leqq x-\frac{\pi}{6} < 2\pi-\frac{\pi}{6}}$



よって $-\frac{\pi}{6} \leqq x-\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi \leqq x-\frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$

$\therefore \boxed{0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi \leqq x < 2\pi}$

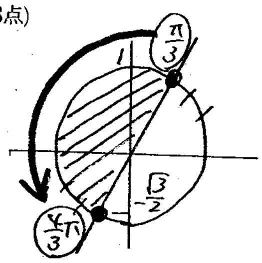
7 三角関数（4）プリントより

関数 $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値も求めよ。(8点)

$y = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

角の変域

$\boxed{\frac{\pi}{3} \leqq x+\frac{\pi}{3} \leqq \pi+\frac{\pi}{3}}$



よって $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \leqq 1$

$\boxed{\text{Max } 2 \begin{pmatrix} x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \\ \text{つまり } x = \frac{\pi}{6} \end{pmatrix},\ \text{Min } -\sqrt{3} \begin{pmatrix} x+\frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi \\ \text{つまり } x = \pi \end{pmatrix}}$

8 三角関数（4）プリントより

関数 $y = 2\sin x\cos x - (\sin x + \cos x) + 3$ について (各2点)

（1） $\sin x + \cos x = t$ として，y を t で表せ。

$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \quad \therefore 2\sin x\cos x = t^2 - 1$

$y = t^2 - 1 - t + 3$

$\boxed{y = t^2 - t + 2}$

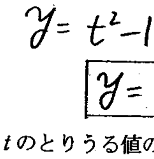
（2） t のとりうる値の範囲を求めよ。

$t = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \boxed{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

（3） y の最大値と最小値を求めよ。

$y = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$



$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } 4+\sqrt{2} \\ \text{Min } \frac{7}{4} \end{array}}$

9 三角関数（5）プリントより

次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。(8点)

$y = 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$

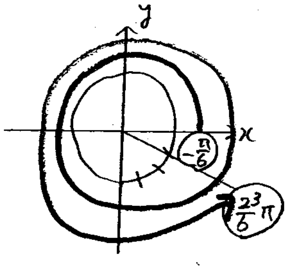
$y = 3\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + \sqrt{3}\sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2}$

$= \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 2$

$= 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) + 2$

角の変域

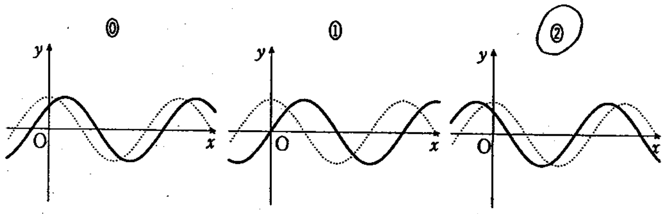
$\boxed{-\frac{\pi}{6} \leqq 2x-\frac{\pi}{6} < 4\pi-\frac{\pi}{6}}$



よって $-1 \leqq \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } 4 \begin{pmatrix} 2x-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi \\ \text{つまり } x = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi \end{pmatrix} \\ \text{Min } 0 \begin{pmatrix} 2x-\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi \\ \text{つまり } x = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \end{pmatrix} \end{array}}$

10 （1） 次の図の点線は $y = \cos x$ のグラフである。$y = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフが実線で正しくかかれているものを，下の ⓪ ～ ② のうちから一つ選べ。 ア

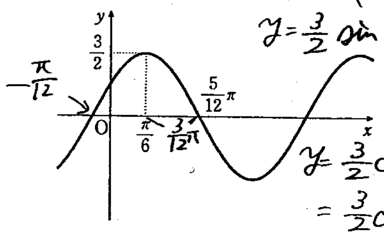


（2） 次の図はある三角関数のグラフである。その関数の式として正しいものを，下の ⓪ ～ ⑤ のうちから二つ選べ。ただし，解答の順序は問わない。 イ ， ウ

周期 $\pi \ (= 2\pi \times \frac{1}{2})$

$y = \frac{3}{2}\sin 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$

$y = \frac{3}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$



$y = \frac{3}{2}\cos 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{3}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

⓪ $y = \frac{3}{2}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$　　① $y = \frac{3}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

② $y = \frac{3}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　③ $y = \frac{3}{2}\cos 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

④ $y = \frac{3}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　　⑤ $y = \frac{3}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

<解答欄> (各2点)

(ア)	②	(イ)	①	(ウ)	③