指数と対数（1）　指数法則・指数関数

（1）$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき　① $a^0=1$　② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

（2）**指数法則**　$a>0$，$b>0$ で，r，s が有理数のとき

① $a^r a^s=a^{r+s}$　② $a^r \div a^s=\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$　③ $(a^r)^s=a^{rs}$　④ $(ab)^r=a^r b^r$

（3）$a>0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

（4）**累乗根の性質**　$a>0$，$b>0$ で，m，n，p が正の整数のとき

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

1　次の式を計算せよ。

（1）$6^0 = 1$

（2）$4^{-2} = \dfrac{1}{16}$

（3）$\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2^2\times3^3\times2}$
$= \sqrt[3]{2^3\times3^3} = 6$

（4）$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8}$
$= 2$

（5）$49^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}}$
$= 7$

（6）$16^{-\frac{3}{4}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}}$
$= 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$

2　$a>0$，$b>0$ とする。次の式を計算せよ。

（1）$(a^{-4})^{-2} = a^8$

（2）$\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt{a}\div\sqrt[6]{a^5}$
$= a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{5}{6}}$
$= a^{\frac{9}{12}+\frac{6}{12}-\frac{10}{12}} = a^{\frac{5}{12}}$ $\left(=\sqrt[12]{a^5}\right)$

（3）$(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{3}{4}}\div b^{-\frac{3}{4}}$
$= a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{3}{4}}\times a^{\frac{3}{4}}\div b^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}b^{-\frac{3}{4}-(-\frac{3}{4})} = a^1 b^0 = a$

3　$2^x+2^{-x}=3$ のとき，次の式の値を求めよ。

（1）$2^{2x}+2^{-2x}$
$=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}$
$= 9-2$
$= 7$

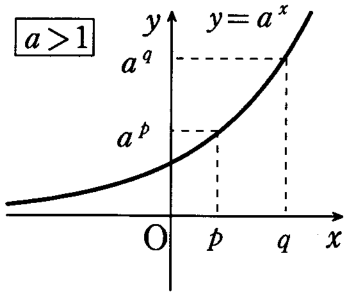
（2）$2^{3x}+2^{-3x}$
$=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot2^x\cdot2^{-x}(2^x+2^{-x})$
$= 27-3\times1\times3$
$= 27-9 = 18$

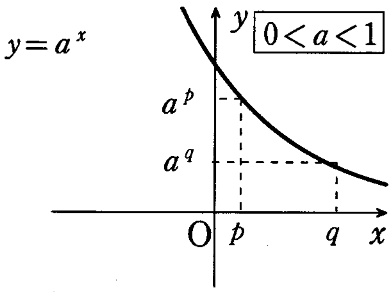
4　$a>0$，$a^{2x}=5$ のとき，a^x+a^{-x} の値を求めよ。

$(a^x+a^{-x})^2 = a^{2x}+2\cdot a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x}$
$= a^{2x}+2+\dfrac{1}{a^{2x}} = 5+2+\dfrac{1}{5} = \dfrac{36}{5}$

$a^x+a^{-x}>0$ より　$a^x+a^{-x} = \dfrac{6}{\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

＜指数関数 $y=a^x$ の性質＞





① $a>1$ のとき

$p<q \iff a^p<a^q$

② $0<a<1$ のとき

$p<q \iff a^p>a^q$

5 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$

底<1 より

$\left(\frac{1}{3}\right)^{4}, \left(\frac{1}{3}\right)^{0}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

(2) $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[6]{32}$, $\sqrt[9]{128}$

$\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{27}{36}}$

$\sqrt[6]{32} = \sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{30}{36}}$

$\sqrt[9]{128} = \sqrt[9]{2^7} = 2^{\frac{7}{9}} = 2^{\frac{28}{36}}$

底>1 より $2^{\frac{27}{36}} < 2^{\frac{28}{36}} < 2^{\frac{30}{36}}$

よって $\sqrt[4]{8} < \sqrt[9]{128} < \sqrt[6]{32}$

6 次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^{2x-1}=2^{3x-5}$

$2^{2(2x-1)} = 2^{3x-5}$

$2(2x-1) = 3x-5$

$4x-2 = 3x-5$

$x = -3$

(2) $5^{2x-1}>\frac{1}{125}$

$5^{2x-1} > 5^{-3}$

底>1 より

$2x-1 > -3$

$x > -1$

(3) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leqq \frac{1}{81}$

$\left(\frac{1}{9}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{9}\right)^2$

底<1 より

$x \geqq 2$

(4) $2^{2x+1}-5\cdot 2^x-12=0$

$2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x-12=0$

$2^x=t$ とおく。 $t>0$

$2t^2-5t-12=0$

$(t-4)(2t+3)=0$

$t>0$ より $t=4$

$2^x=2^2$

$x=2$

(5) $16^x-3\cdot 4^x-4\geqq 0$

$4^{2x}-3\cdot 4^x-4 \geqq 0$

$4^x=t$ とおく。 $t>0$ …①

$t^2-3t-4 \geqq 0$

$(t-4)(t+1) \geqq 0$

$t \leqq -1,\ 4 \leqq t$ …②

①，② より $t \geqq 4$

$4^x \geqq 4$

底>1 より $x \geqq 1$