指数と対数（2）　指数関数・対数・対数関数

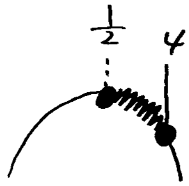
$\boxed{1}$ 関数 $y=-4^x+2^x+2$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

$y=-2^{2x}+2^x+2$

$t=2^x$ とおく。$\left(\begin{array}{l} 2^{-1}\leqq 2^x \leqq 2^2 \\ \frac{1}{2}\leqq t \leqq 4 \end{array}\right)$

$y=-t^2+t+2$

$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$



$\left\{\begin{array}{l} \text{Max } \frac{9}{4} \left(\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ \text{つまり } x=-1 \end{array}\right) \\ \text{Min } -10 \left(\begin{array}{l} t=4 \\ \text{つまり } x=2 \end{array}\right) \end{array}\right.$

$\boxed{2}$ 関数 $y=4^x+4^{-x}-5(2^x+2^{-x})+6$ について，次の問いに答えよ。

（1） $2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ より $t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

$\therefore \underline{t\geqq 2}$

（2） y を t で表せ。

$4^x+4^{-x}=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=t^2-2$

よって $y=t^2-2-5t+6$

$\underline{y=t^2-5t+4}$

（3） y の最小値とそのときの x の値を求めよ。

$y=\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+4$

$=\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

$\underline{\text{Min } -\frac{9}{4}}$

$t=\frac{5}{2}$ のとき，つまり $2^x+\frac{1}{2^x}=\frac{5}{2}$

$2^x=M$ とおく。$M+\frac{1}{M}=\frac{5}{2}$

$2M^2-5M+2=0$

$(M-2)(2M-1)=0$

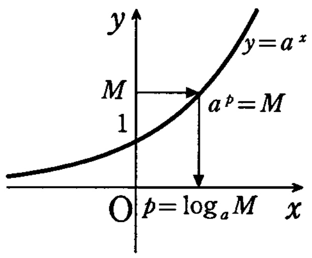
$M=2, \frac{1}{2}$ $\therefore 2^x=2, 2^{-1}$ $\therefore \underline{x=1,-1}$

＜対数の定義＞

$a^p=M \iff p=\log_a M$

※ a を「底」といい，$a>0$，$a\neq 1$

M を「真数」といい，$M>0$ （真数条件）



＜対数の性質＞ $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ で，k が実数のとき

① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$　　② $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

③ $\log_a M^k=k\log_a M$

＜底の変換公式＞ $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ （a，b，c は正の数で，$a\neq 1$，$b\neq 1$，$c\neq 1$）

$\boxed{3}$ 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_7 49$

$= \log_7 7^2 = \underline{2}$

(2) $\log_2 \frac{1}{4}$

$= \log_2 2^{-2} = \underline{-2}$

(3) $\log_2 \sqrt[3]{32} = \log_2 \sqrt[3]{2^5}$

$= \log_2 2^{\frac{5}{3}} = \underline{\frac{5}{3}}$

(4) $\log_4 32$

$= \frac{\log_2 32}{\log_2 4}$

$= \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^2} = \underline{\frac{5}{2}}$

(5) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

$= \frac{\log_3 9}{\log_3 \frac{1}{3}}$

$= \frac{\log_3 3^2}{\log_3 3^{-1}} = \underline{-2}$

(6) $\log_3 5 \cdot \log_5 27$

$= \log_3 5 \times \frac{\log_3 27}{\log_3 5}$

$= \log_3 3^3 = \underline{3}$

$\boxed{4}$ 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_8 2 + \log_8 32 = \log_8 64$

$= \log_8 8^2 = \underline{2}$

(2) $\log_3 45 - \log_3 5 = \log_3 9$

$= \log_3 3^2 = \underline{2}$

(3) $4\log_2\sqrt{3} - \log_2 18$

$= 4\log_2 3^{\frac{1}{2}} - \log_2 (2\times 3^2)$

$= 4\cdot\frac{1}{2}\log_2 3 - (1 + 2\log_2 3)$

$= 2\log_2 3 - 1 - 2\log_2 3$

$= \underline{-1}$

(4) $4\log_5\sqrt{5} - \frac{1}{3}\log_5 2 + \log_{125} 250$

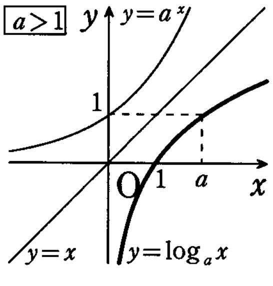
$= 4\log_5 5^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\log_5 2 + \frac{\log_5 (5^3\times 2)}{\log_5 5^3}$

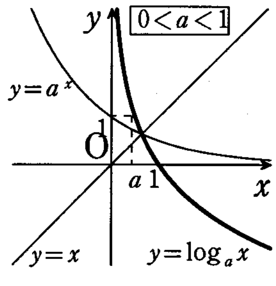
$= 2 - \frac{1}{3}\log_5 2 + \frac{1}{3}(3 + \log_5 2)$

$= \underline{3}$

<対数関数の性質>

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，指数関数 $y = a^x$ のグラフと，直線 $y = x$ に関して対称である。





① $a>1$ のとき　$p<q \Leftrightarrow \log_a p < \log_a q$

② $0<a<1$ のとき　$p<q \Leftrightarrow \log_a p < \log_a q$

$\boxed{5}$ $\log_5 6$，$\log_{25} 30$，1 の大小を不等号を用いて表せ。

$\log_5 6$

$\log_{25} 30 = \frac{\log_5 30}{\log_5 5^2} = \frac{1}{2}\log_5 30 = \log_5\sqrt{30}$

$1 = \log_5 5$

底>1 より　$\log_5 5 < \log_5 \sqrt{30} < \log_5 6$　$\therefore\ \underline{1 < \log_{25} 30 < \log_5 6}$