指数と対数（3）　対数関数・常用対数

$\boxed{1}$ 次の方程式を解け。

（1）$\log_{10}(x-1)+\log_{10}(x+2)=1$

$\left(\begin{array}{l}\text{真数条件}\ x>1\ \text{かつ}\ x>-2 \\ \quad \text{つまり}\ x>1 \cdots ① \end{array}\right)$

$\log_{10}(x-1)(x+2)=1$

$(x-1)(x+2)=10$

$x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$

① より　$\underline{x=3}$

（2）$\log_2(3-x)=\log_4(2x+18)$

$\left(\begin{array}{l}\text{真数条件}\ x<3\ \text{かつ}\ x>-9 \\ \quad \text{つまり}\ -9<x<3 \cdots ① \end{array}\right)$

$\log_2(3-x)=\dfrac{\log_2(2x+18)}{2}$

$2\log_2(3-x)=\log_2(2x+18)$

$\log_2(3-x)^2=\log_2(2x+18)$

$(3-x)^2=2x+18$

$x^2-8x-9=0$

$(x-9)(x+1)=0$

① より　$\underline{x=-1}$

$\boxed{2}$ 次の不等式を解け。

（1）$2\log_{0.1}(x-1)<\log_{0.1}(7-x)$

$\left(\begin{array}{l}\text{真数条件}\ x>1\ \text{かつ}\ x<7 \\ \quad \text{つまり}\ 1<x<7 \cdots ① \end{array}\right)$

$\log_{0.1}(x-1)^2<\log_{0.1}(7-x)$

底 <1 より　$(x-1)^2>7-x$

$x^2-x-6>0$

$(x-3)(x+2)>0$

$x<-2,\ 3<x \cdots ②$

①, ② より　$\underline{3<x<7}$

（2）$\log_4(x+2)+\log_4(x-4)\leqq 2$

$\left(\begin{array}{l}\text{真数条件}\ x>-2\ \text{かつ}\ x>4 \\ \quad \text{つまり}\ x>4 \cdots ① \end{array}\right)$

$\log_4(x+2)(x-4)\leqq\log_4 16$

底 >1 より　$(x+2)(x-4)\leqq 16$

$x^2-2x-24\leqq 0$

$(x-6)(x+4)\leqq 0$

$-4\leqq x\leqq 6 \cdots ②$

①, ② より　$\underline{4<x\leqq 6}$

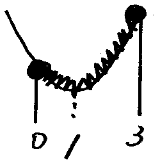
$\boxed{3}$ $1\leqq x\leqq 64$ のとき，関数 $y=(\log_4 x)^2-\log_4 x^2$ の最大値と最小値を求めよ。

$y=(\log_4 x)^2-2\log_4 x$

$t=\log_4 x$ とおく。

$\left(\begin{array}{l}\log_4 1\leqq\log_4 x\leqq\log_4 64 \\ \therefore\ 0\leqq t\leqq 3 \end{array}\right)$

$y=t^2-2t=(t-1)^2-1$



$\left\{\begin{array}{l}\text{Max } 3\ \left(\begin{array}{l} t=3 \\ \text{つまり}\ x=64 \end{array}\right) \\ \text{Min } -1\ \left(\begin{array}{l} t=1 \\ \text{つまり}\ x=4 \end{array}\right) \end{array}\right.$

$\boxed{4}$ 常用対数表を用いて，次の値を求めよ。

（1）$\log_{10}37200=\log_{10}(3.72\times 10^4)$

$=4+\log_{10}3.72$

$=4+0.5705$

$=\underline{4.5705}$

（2）$\log_{10}0.0158=\log_{10}(1.58\times 10^{-2})$

$=-2+\log_{10}1.58$

$=-2+0.1987$

$=\underline{-1.8013}$

$\log_{10}1 = 0$	$\log_{10}6 = \log_{10}2 + \log_{10}3 = 0.7781$
$\log_{10}2 = 0.3010$	$\log_{10}7 = 0.8451$
$\log_{10}3 = 0.4771$	$\log_{10}8 = 3\log_{10}2 = 0.9030$
$\log_{10}4 = 2\log_{10}2 = 0.6020$	$\log_{10}9 = 2\log_{10}3 = 0.9542$
$\log_{10}5 = 1 - \log_{10}2 = 0.6990$	$\log_{10}10 = 1$

5 (1) 6^{20} は何桁の整数か。

$$\log_{10}6^{20} = 20 \times \log_{10}6$$
$$= 20 \times 0.7781$$
$$= 15.562$$
$$15 < \log_{10}6^{20} < 16$$
$$10^{15} < 6^{20} < 10^{16}$$ より 16桁

(2) 6^{20} の最高位の数字を求めよ。

(1) より $6^{20} = 10^{15.562}$

$$= 10^{0.562} \times 10^{15}$$

$\log_{10}3 = 0.4771$ より $3 = 10^{0.4771}$

$\log_{10}4 = 0.6020$ より $4 = 10^{0.6020}$

よって $3 < 10^{0.562} < 4$

$\therefore 3 \times 10^{15} < 6^{20} < 4 \times 10^{15}$

最高位の数字は 3

6 $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \log_{10}2^{-100} = -100 \times \log_{10}2 = -100 \times 0.301 = -30.1$$
$$-31 < \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} < -30$$
$$10^{-31} < \left(\frac{1}{2}\right)^{100} < 10^{-30}$$

よって 小数第31位

7 年利率 5 %，1 年ごとの複利で 10 万円を預金したとき，x 年後の元利合計は $10(1.05)^x$ 万円となる。元利合計が初めて 12 万円を超えるのは何年後か。ただし，$\log_{10}1.05 = 0.0212$, $\log_{10}1.2 = 0.0791$ を使ってよい。

$$10(1.05)^x > 12$$
$$(1.05)^x > 1.2$$
$$\log_{10}(1.05)^x > \log_{10}1.2$$
$$x\log_{10}1.05 > \log_{10}1.2$$
$$0.0212x > 0.0791$$
$$x > \frac{791}{212}\ (= 3.7\cdots)$$

よって 4年後

8 毎年度初めに 1 万円ずつ積み立てる。年利率を 0.6 % とし，1 年ごとの複利で第 10 年度末には元利合計はいくらになるか。ただし，$1.006^{10} = 1.0616$ として計算し，1 円未満は切り捨てよ。

$$1 \times 1.006^{10} + 1 \times 1.006^{9} + \cdots + 1 \times 1.006$$
$$= 1.006 + 1.006^2 + \cdots + 1.006^{10}$$
$$= \frac{1.006(1.006^{10} - 1)}{1.006 - 1} = \frac{1006 \times 0.0616}{6} = 10.32826\cdots$$

よって 103282円