数列（１０）　数学的帰納法②

例題 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{4}{4-a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

解 (1) $a_2=\dfrac{4}{4-1}=\boxed{\dfrac{4}{3}}$，$a_3=\dfrac{4}{4-\frac{4}{3}}=\boxed{\dfrac{3}{2}}$

$a_4=\dfrac{4}{4-\frac{3}{2}}=\boxed{\dfrac{8}{5}}$，$a_5=\dfrac{4}{4-\frac{8}{5}}=\boxed{\dfrac{5}{3}}$

(2) $\{a_n\}$：$\dfrac{2}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{6}{4}$，$\dfrac{8}{5}$，$\dfrac{10}{6}$，…

$a_n=\dfrac{2n}{n+1}$ と推測される。以下，これを示す。

[1] $n=1$ のとき $a_1=\dfrac{2}{2}=1$ となり成立。

[2] $n=k$ のとき成立すると仮定して $a_k=\dfrac{2k}{k+1}$

このとき $a_{k+1}=\dfrac{4}{4-a_k}=\dfrac{4}{4-\frac{2k}{k+1}}$

$$=\frac{4(k+1)}{4(k+1)-2k}$$

$$=\frac{4(k+1)}{2k+4}$$

$$=\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

よって $n=k+1$ のときも成立。

[1] [2] より すべての自然数 n で $a_n=\boxed{\dfrac{2n}{n+1}}$

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$a_2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $a_3=2-\frac{1}{\frac{3}{2}}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

$a_4=2-\frac{1}{\frac{4}{3}}=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

$\{a_n\}: \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots$

$a_n=\frac{n+1}{n}$ と推測される。以下、これを示す。

[1] $n=1$ のとき $a_1=\frac{2}{1}=2$ となり成立。

[2] $n=k$ のとき成立すると仮定して $a_k=\frac{k+1}{k}$

このとき $a_{k+1}=2-\frac{1}{a_k}$

$$=2-\frac{k}{k+1}$$

$$=\frac{2(k+1)-k}{k+1}$$

$$=\frac{k+2}{k+1}=\frac{(k+1)+1}{k+1}$$

よって $n=k+1$ のときも成立する。

[1] [2] より すべての自然数 n で $a_n=\boxed{\frac{n+1}{n}}$