数列（1）　等差数列と等比数列

[1] 等差数列

① $\boxed{\text{一般項（第 } n \text{ 項）}}$ 初項 a，公差 d のとき　$a_n = a + (n-1)d$

② $\boxed{\text{和の公式 part1}}$ 初項 a，末項 l のとき　$S_n = \dfrac{n(a+l)}{2}$

$\boxed{\text{和の公式 part2}}$ 　$S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

③ $\boxed{\text{等差中項}}$ 　a, b, c が等差数列 $\Leftrightarrow$ $2b = a + c$

1 第 16 項が -50，第 21 項が -80 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 初項と公差を求めよ。また，一般項を求めよ。　(2) 4 は第何項か。

(1) $a_{16} = a + 15d = -50 \quad \cdots①$

$a_{21} = a + 20d = -80 \quad \cdots②$

①－② $-5d = 30 \quad \therefore d = -6$

② より $a - 120 = -80 \quad \therefore a = 40$

$a_n = 40 + (n-1)\cdot(-6) = -6n + 46$

よって 初項 40，公差 -6，$a_n = -6n + 46$

(2) $-6n + 46 = 4$

$-6n = -42$

$n = 7$

よって 第7項

2 次の等差数列の和を求めよ。

62, 55, 48, 41, ……, -8

$a_n = 62 + (n-1)\cdot(-7)$

$= -7n + 69$

$-7n + 69 = -8$

$-7n = -77$

$n = 11$

よって $S_{11} = \dfrac{11(62-8)}{2}$

$= \dfrac{11 \times 54}{2} = 297$

3 初項が 50，公差が -3 である等差数列について，初項から第何項までの和が最大となるか。また，その和を求めよ。

$a_n = 50 + (n-1)\cdot(-3)$

$= -3n + 53$

$a_n \geqq 0 \Leftrightarrow -3n + 53 \geqq 0$

$n \leqq \dfrac{53}{3} \left(= 17\dfrac{2}{3}\right)$

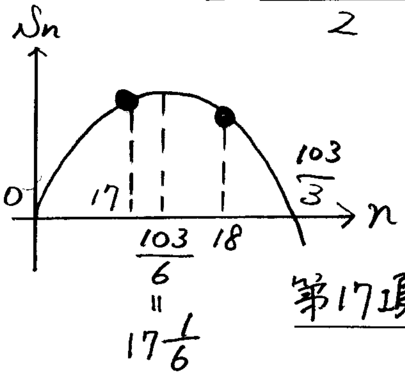
よって 第17項までの和が最大

$S_{17} = \dfrac{17\{2\cdot 50 + (17-1)\cdot(-3)\}}{2}$

$= 442$

別解 $S_n = \dfrac{n\{2\cdot 50 + (n-1)\cdot(-3)\}}{2}$

$= \dfrac{n(-3n+103)}{2}$



第17項までの和が最大

<以下略>

［2］ 等比数列

① $\boxed{\text{一般項（第}n\text{項）}}$ 初項 a，公比 r のとき $a_n=ar^{n-1}$

② $\boxed{\text{和の公式}}$ $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ $(r\neq1)$

③ $\boxed{\text{等比中項}}$ a，b，c が等比数列 $\Leftrightarrow$ $b^2=ac$

$\boxed{4}$ (1) 第５項が -48，第７項が -192の等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

$a_5=ar^4=-48$ …①

$a_7=ar^6=-192$ …②

②÷① より $r^2=4$

$r=\pm2$

[1] $r=2$ のとき $a=-3$

[2] $r=-2$ のとき $a=-3$

よって

$\underline{a_n=-3\cdot2^{n-1}$ または $a_n=-3\cdot(-2)^{n-1}}$ //

(2) 第２項が６，初項から第３項までの和が21である等比数列の初項と公比を求めよ。

$$\begin{cases} ar=6 & \cdots① \\ a+ar+ar^2=21 & \cdots② \end{cases}$$

$a(1+r+r^2)=21$

両辺に r をかけて

$ar(1+r+r^2)=21r$

① より $6(1+r+r^2)=21r$

$6r^2-15r+6=0$

$2r^2-5r+2=0$

$(r-2)(2r-1)=0$

$r=2,\ \frac{1}{2}$

[1] $r=2$ のとき $a=3$

[2] $r=\frac{1}{2}$ のとき $a=12$

よって

$\begin{cases}\text{初項 } 3\\ \text{公比 } 2\end{cases}$ または $\begin{cases}\text{初項 } 12\\ \text{公比 } \frac{1}{2}\end{cases}$ //

$\boxed{5}$ 次の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $4,1,\frac{1}{4},\frac{1}{16}\cdots\cdots$ (2) $-1,\ 5,\ -25,\ \cdots\cdots$

(1) $S_n=\dfrac{4\{1-(\frac{1}{4})^n\}}{1-\frac{1}{4}}=\underline{\dfrac{16}{3}\{1-(\frac{1}{4})^n\}}$ //

(2) $S_n=\dfrac{-\{1-(-5)^n\}}{1-(-5)}=\underline{\dfrac{(-5)^n-1}{6}}$ //

$\boxed{6}$ 数列８，a，b が等差数列で，数列 a，b，36 が等比数列であるとき，a，b の値を求めよ。

$2a=b+8$ …①

$b^2=36a$ …②

① より $b=2a-8$

② より $(2a-8)^2=36a$

$4a^2-68a+64=0$

$a^2-17a+16=0$

$(a-1)(a-16)=0$

よって $a=1,\ 16$

ゆえに $\underline{(a,b)=(1,-6),\ (16,24)}$ //