数列（3）　復習①　～等差数列・等比数列・Σの計算～

$\boxed{1}$ (1)　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ に対して，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。$S_{10}=-5$，$S_{16}=8$ が成り立つとき $a=\boxed{アイ}$，$d=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ であり，S_1，S_2，……，S_{100} の中で最小の値は $\boxed{オカ}$ である。

$$S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}=-5$$

$$2a+9d=-1 \cdots ①$$

$$S_{16}=\frac{16(2a+15d)}{2}=8$$

$$2a+15d=1 \cdots ②$$

①－② より $-6d=-2$　$\therefore \underline{d=\frac{1}{3}}$ (ウエ)

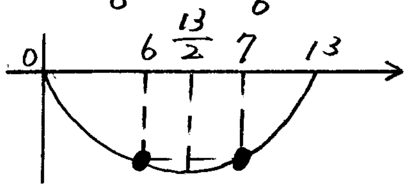
① より $2a+3=-1$

$\therefore \underline{a=-2}$ (アイ)

$$S_n=\frac{n\{2\cdot(-2)+(n-1)\cdot\frac{1}{3}\}}{2}$$

$$=\frac{n}{2}\left(-4+\frac{n}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{6}n^2-\frac{13}{6}n=\frac{n(n-13)}{6}$$



$n=6,7$ で最小となる。

$S_6=S_7=\underline{-7}$

(2)　初項 4，公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和 T_n は $T_n=n(n+\boxed{キ})$ であるから，$T_n>400$ となる最小の n は $n=\boxed{クケ}$ である。

$$T_n=\frac{n\{2\cdot4+(n-1)\cdot2\}}{2}$$

$$=\frac{n(2n+6)}{2}$$

$$=\underline{n(n+3)} \text{ (キ)}$$

$T_n>400 \iff n(n+3)>400$

（$n=19$ のとき（左辺）$=19\cdot22=418$
$n=18$ のとき（左辺）$=18\cdot21=378$）

よって　$\underline{n=19}$ (クケ)

$\boxed{2}$　次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$$=\frac{1+\frac{1}{243}}{\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{\frac{244}{243}}{\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{244}{4\cdot81}=\boxed{\frac{61}{81}}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^{k+1}=\frac{9(3^n-1)}{3-1}$

$$=\boxed{\frac{9(3^n-1)}{2}}$$

$$=\boxed{\frac{3^{n+2}-9}{2}}$$

3 初項が a，公比が r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_3=28$，$S_9=2044$ が成り立っているとする。ただし，r は実数で $r>0$，$r\neq1$ である。

条件から $\dfrac{a(r^{\boxed{ア}}-1)}{r-1}=28$ ……①，$\dfrac{a(r^{\boxed{イ}}-1)}{r-1}=2044$ ……② が成り立つ。

①，②より，$r^{\boxed{ウ}}+r^{\boxed{エ}}+1=\boxed{オカ}$ が成り立つから，$r=\boxed{キ}$ であり，$a=\boxed{ク}$ である。

$$S_3=\frac{a(r^3-1)}{r-1}=28 \cdots ①$$

$$S_9=\frac{a(r^9-1)}{r-1}=2044 \cdots ②$$

$$\frac{a(r^3-1)(r^6+r^3+1)}{r-1}=2044$$

①より $28(r^6+r^3+1)=2044$

$$r^6+r^3+1=73$$

$$r^6+r^3-72=0$$

$$(r^3+9)(r^3-8)=0$$

$r>0$ で，r は実数だから $r=2$

①より $a=4$

4 次の和を求めよ。

$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot4\cdot7+4\cdot5\cdot9+\cdots\cdots+n(n+1)(2n+1)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(2k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)$$

$$=2\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2+n(n+1)(2n+1)+n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n^2+3n+2)}{2}$$

$$=\boxed{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}}$$

5 次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

2，2+4，2+4+6，2+4+6+8，…… $\boxed{2+4+6+\cdots+2n}$

$$(第n項)=\sum_{k=1}^{n}2k=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$$

第 k 項は $\boxed{k(k+1)}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$$

$$=\boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$