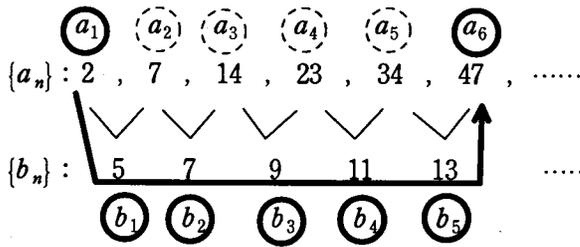


数列 (4) 「階差数列」 「和から一般項」

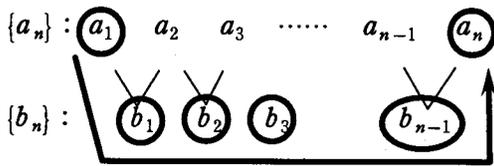
例えば,



$$a_6 = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)$$

1つ少ない

一般に,



$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1})$$

1つ少ない

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

これは、階差数列の一般項を求めて。

例題 1 階差数列を利用して、次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$\{a_n\}: 1, 4, 11, 22, 37, 56, \dots \quad \{b_n\}: 3, 7, 11, 15, 19, \dots$$

$$b_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$$

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 1)$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= 1 + 2n(n-1) - n + 1 = \underline{2n^2 - 3n + 2} \quad (n=1 \text{ でも成立})$$

1 階差数列を利用して、次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $5, 6, 5, 2, -3, \dots$

$$\{b_n\}: 1, -1, -3, -5, \dots \quad b_n = 1 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 3$$

$n \geq 2$ のとき $a_n = 5 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2k + 3)$

$$= 5 - 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 3(n-1)$$

$$= 5 - n(n-1) + 3n - 3 = \underline{-n^2 + 4n + 2} \quad (n=1 \text{ でも成立})$$

(2) $1, 2, 5, 14, 41, \dots$

$$\{b_n\}: 1, 3, 9, 27, \dots \quad b_n = 3^{n-1}$$

$n \geq 2$ のとき $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$

$$= 1 + \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = \boxed{\frac{3^{n-1} + 1}{2}} \quad (n=1 \text{ でも成立})$$

$$\begin{array}{r}
 a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_n \\
 -) a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = S_{n-1} \\
 \hline
 a_n = S_n - S_{n-1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1} \\
 n = 1 \text{ のとき } a_1 = S_1
 \end{array}$$

例題2 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^2 + 4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = S_1 = 5 \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n^2 + 4n - \{ (n-1)^2 + 4(n-1) \} \\
 &= n^2 + 4n - (n^2 + 2n - 3) \\
 &= 2n + 3 \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \underline{a_n = 2n + 3}$$

2 初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n = n^2 - 3n$

$$a_1 = S_1 = -2 \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n^2 - 3n - \{ (n-1)^2 - 3(n-1) \} \\
 &= n^2 - 3n - (n^2 - 5n + 4) \\
 &= 2n - 4 \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \underline{a_n = 2n - 4}$$

(2) $S_n = 2^{n+2} - 4$

$$a_1 = S_1 = 4 \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= 2^{n+2} - 4 - (2^{n+1} - 4) \\
 &= 2^{n+2} - 2^{n+1} \\
 &= 2 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} = (2-1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \underline{a_n = 2^{n+1}}$$