例えば，

$\{a_n\}$: 2 , 7 , 14 , 23 , 34 , 47 , ……

$\{b_n\}$: 5 　7 　9 　11 　13 　……

a_1　a_2　a_3　a_4　a_5　a_6

b_1　b_2　b_3　b_4　b_5

$$a_6 = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)$$

1つ少ない

一般に，

$\{a_n\}$: a_1　a_2　a_3　……　a_{n-1}　a_n

$\{b_n\}$: b_1　b_2　b_3　　b_{n-1}

1つ少ない

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_{n-1})$$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

これは，階差数列の一般項を求めて。

例題 1　階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\{a_n\}$: 1, 4, 11, 22, 37, 56, ……

$\{b_n\}$: 3 7 11 15 19

$b_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k-1)$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= 1 + 2n(n-1) - n + 1 = \underline{2n^2 - 3n + 2}$$ ($n=1$ でも成立)

1　階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　5, 6, 5, 2, −3, ……

$\{b_n\}$: 1 −1 −3 −5

$b_n = 1 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 3$

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = 5 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2k+3)$

$$= 5 - 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 3(n-1)$$

$$= 5 - n(n-1) + 3n - 3 = \underline{-n^2 + 4n + 2}$$ ($n=1$ でも成立)

(2)　1, 2, 5, 14, 41, ……

$\{b_n\}$: 1 3 9 27

$b_n = 3^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$

$$= 1 + \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = \boxed{\frac{3^{n-1} + 1}{2}}$$ ($n=1$ でも成立)

$$
\begin{array}{rcl}
a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n &=& S_n \\
-)\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1} \qquad &=& S_{n-1} \\
\hline
a_n &=& S_n - S_{n-1}
\end{array}
$$

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

$n = 1$ のとき　$a_1 = S_1$

例題2　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^2 + 4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1 = S_1 = 5$ …①

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 + 4n - \{(n-1)^2 + 4(n-1)\}$

$= n^2 + 4n - (n^2 + 2n - 3)$

$= 2n + 3$ …②

①, ② より　$\underline{a_n = 2n + 3}$ //

2　初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n = n^2 - 3n$

$a_1 = S_1 = -2$ …①

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 - 3n - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\}$

$= n^2 - 3n - (n^2 - 5n + 4)$

$= 2n - 4$ …②

①, ② より　$\underline{a_n = 2n - 4}$ //

(2)　$S_n = 2^{n+2} - 4$

$a_1 = S_1 = 4$ …①

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 2^{n+2} - 4 - (2^{n+1} - 4)$

$= 2^{n+2} - 2^{n+1}$

$= 2 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} = (2-1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1}$ …②

①, ② より　$\underline{a_n = 2^{n+1}}$ //