数列（6）　復習②　～階差数列・和から一般項・部分分数・$S-rS$～

$\boxed{1}$　数列$\{a_n\}$：3，0，−1，0，3，8，15，…… の階差数列は，初項$\boxed{アイ}$，公差$\boxed{ウ}$の等差数列であり，その第n項は$\boxed{エ}n-\boxed{オ}$である。

これを用いて，$\{a_n\}$の第n項を求めると，$a_n=n^2-\boxed{カ}n+\boxed{キ}$である。

$\{a_n\}: 3, 0, -1, 0, 3, 8, 15, \cdots$

$\{b_n\}: -3, -1, 1, 3, 5, 7$

$b_n=-3+(n-1)\cdot 2=2n-5$

$n \geqq 2$ のとき　$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-5)$

$=3+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}-5(n-1)$

$=3+n(n-1)-5n+5$

$=\boxed{n^2-6n+8}$ ($n=1$でも成立)

$\boxed{2}$　$S=\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$，$T=\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{11\cdot 15}$ とすると

$S=\frac{n}{\boxed{ア}(3n+\boxed{イ})}$，$T=\frac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカキ}}$ である。

$S=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{3n+4-4}{4(3n+4)}=\frac{3n}{12(3n+4)}=\boxed{\frac{n}{4(3n+4)}}$

$T=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{11}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{15}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{12}{13}+\frac{4}{15}\right)=\frac{3}{13}+\frac{1}{15}=\frac{45+13}{13\cdot 15}=\boxed{\frac{58}{195}}$

$\boxed{3}$ (1)　数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nに対して，$S_n=n(n+2)$が成り立つとき，

$a_1=\boxed{ア}$，$a_n=\boxed{イ}n+\boxed{ウ}$ である。

$a_1=S_1=1\cdot 3=\underbrace{3}_{(ア)}$

$n \geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n(n+2)-(n-1)(n+1)$

$=n^2+2n-(n^2-1)=\boxed{2n+1}$ ($n=1$でも成立)

(2) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n に対して，$T_n=1-(-2)^n$ が成り立つとき，

$b_n=\boxed{エ}\left(\boxed{オカ}\right)^{n-1}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\left\{1-\frac{1}{\left(\boxed{ケコ}\right)^n}\right\}$ である。

$b_1=T_1=1-(-2)=3$

$n\geqq 2$ のとき $b_n=T_n-T_{n-1}=1-(-2)^n-\{1-(-2)^{n-1}\}$

$=-(-2)^n+(-2)^{n-1}$

$=2\cdot(-2)^{n-1}+(-2)^{n-1}=3(-2)^{n-1}$ ($n=1$でも成立)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2}{9}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\boxed{\frac{2}{9}\left\{1-\frac{1}{(-2)^n}\right\}}$$

4 正の整数 a を初項とし，1より大きい整数 r を公比とする等比数列 $\{a_n\}$ が $a_4=54$ を満たすとき，

$a=\boxed{ア}$，$r=\boxed{イ}$ である。このとき，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k$ とすると，

$rS_n-S_n=\left(\boxed{ウ}n-\boxed{エ}\right)\boxed{オ}^n+\boxed{カ}$ となる。これより，$S_6=\boxed{キクケコ}$ である。

$ar^3=54$

条件より

$a=2,\ r=3$ (アイ)

$a_n=2\cdot 3^{n-1}$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2k\cdot 3^{k-1}$ より

$$\begin{array}{rl} 3S_n= & \quad\ \ 2\cdot 3+4\cdot 3^2+\cdots+(2n-2)3^{n-1}+2n\cdot 3^n \\ -)\ S_n= & 2+4\cdot 3+6\cdot 3^2+\cdots+2n\cdot 3^{n-1} \end{array}$$

$3S_n-S_n=-2-2\cdot 3-2\cdot 3^2-\cdots-2\cdot 3^{n-1}+2n\cdot 3^n$

$=-2(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})+2n\cdot 3^n$

$=-2\times\dfrac{3^n-1}{3-1}+2n\cdot 3^n$

$=-3^n+1+2n\cdot 3^n$

$=\boxed{(2n-1)3^n+1}$

よって $S_n=\dfrac{(2n-1)3^n+1}{2}$　$\therefore S_6=\dfrac{11\times 729+1}{2}=\boxed{4010}$