数列（7）　漸化式①　～基本形の解法～

$\boxed{1}$　次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3$　　　　(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=-2a_n$

［1］ 階差数列を利用した2項間漸化式の解法

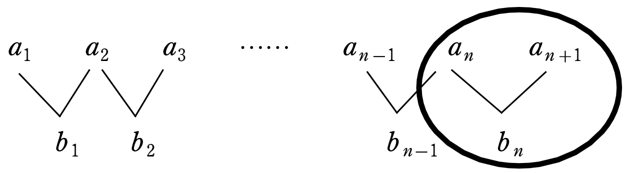
$a_{n+1}-a_n=b_n$　のとき　　$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-\sum_{k=1}^{n}b_k$

よって　$(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_{n+1})=-\sum_{k=1}^{n}b_k$

したがって　$a_1-a_{n+1}=-\sum_{k=1}^{n}b_k$　　番号を下げて　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$　$(n\geqq 2)$

＜ポイント＞　$a_{n+1}-a_n=$(nの式)　は「階差数列の公式」を利用せよ！！

注意



※階差数列の一般項b_nは「$a_{n+1}-a_n$」で求まる。

$\boxed{\text{例題１}}$　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3^n$　によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$\boxed{2}$　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+n^2+n$　によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

［２］ 特性方程式による2項間漸化式の解法

（例）$a_1=3$ 、$a_{n+1}=3a_n+1$ （$n=1,2,3,\cdots$） で決まる数列の一般項 a_n を求めよ。

解答　$a_{n+1}=3a_n+1$ を変形して　$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(a_n+\dfrac{1}{2}\right)$

$$=3^n\left(a_1+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}\cdot 3^n$$

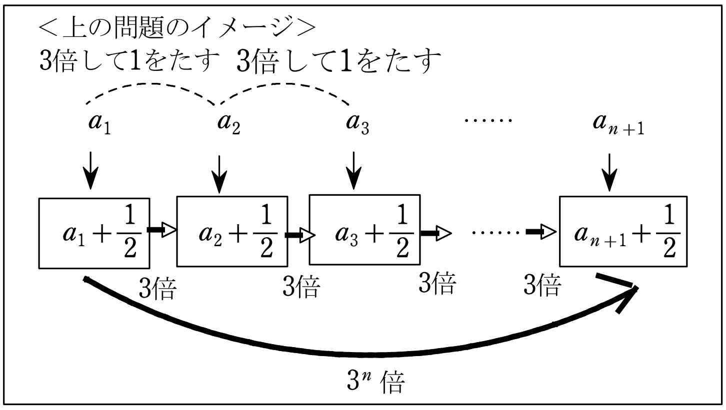
$$\therefore\quad \underline{a_n=\frac{7}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}}\quad 答$$

$b_n=a_n+\dfrac{1}{2}$ とおくと

$b_{n+1}=3b_n\,,\, b_1=\dfrac{7}{2}$

$\therefore b_n=\dfrac{7}{2}\cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n=\dfrac{7}{2}\cdot 3^{n-1}-\dfrac{1}{2}$



例題２　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n-6$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。