数列（7）　漸化式①　～基本形の解法～

$\boxed{1}$　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+3$　　　　(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=-2a_n$

$a_n=2+(n-1)\cdot 3$

$=\boxed{3n-1}$

$a_n=\boxed{(-2)^{n-1}}$

［1］ 階差数列を利用した2項間漸化式の解法

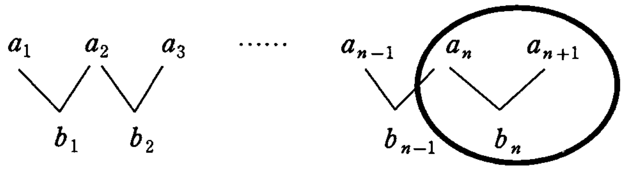
$a_{n+1}-a_n=b_n$　のとき　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-\sum_{k=1}^{n}b_k$

よって　$(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_{n+1})=-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$

したがって　$a_1-a_{n+1}=-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$　　番号を下げて　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k$　$(n\geqq 2)$

＜ポイント＞　$a_{n+1}-a_n=$(nの式)　は「階差数列の公式」を利用せよ！！

注意



※階差数列の一般項 b_n は「$a_{n+1}-a_n$」で求まる。

例題1　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+3^n$　によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}3^k$$

$$=2+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$=2+\frac{3^n-3}{2}=\boxed{\frac{3^n+1}{2}}$$

($n=1$でも成立)

$\boxed{2}$　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n^2+n$　によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)$$

$$=2+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=\frac{12+n(2n^2-3n+1)+3n(n-1)}{6}$$

$$=\frac{2n^3-2n+12}{6}=\boxed{\frac{n^3-n+6}{3}}$$

($n=1$でも成立)

[2] 特性方程式による2項間漸化式の解法

（例）$a_1=3$ 、$a_{n+1}=3a_n+1$ （$n=1,2,3,\cdots$） で決まる数列の一般項 a_n を求めよ。

解答　$a_{n+1}=3a_n+1$ を変形して　$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(a_n+\dfrac{1}{2}\right)$

$$=3^n\left(a_1+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}\cdot 3^n$$

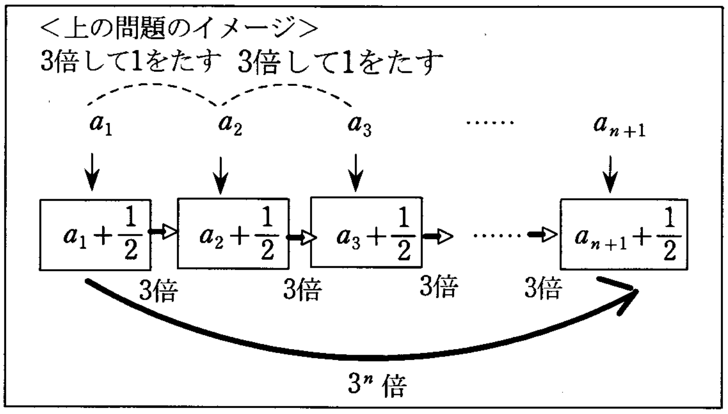
$$\therefore\ a_n=\frac{7}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}$$ 答

$b_n=a_n+\dfrac{1}{2}$ とおくと

$b_{n+1}=3b_n$, $b_1=\dfrac{7}{2}$

$\therefore b_n=\dfrac{7}{2}\cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n=\dfrac{7}{2}\cdot 3^{n-1}-\dfrac{1}{2}$



例題2　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_{n+1}=2a_n+3$$
$$-)\quad c=2c+3 \to c=-3$$
$$a_{n+1}-c=2(a_n-c)$$

$c=-3$を代入して

$$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$$

$b_n=a_n+3$とおくと

$$b_{n+1}=2b_n\ (b_1=a_1+3=4)$$

よって $b_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$

$a_n+3=2^{n+1}$　$\therefore$ $\boxed{a_n=2^{n+1}-3}$

別解　$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$

$$=2^n(a_1+3)$$
$$=4\cdot 2^n$$
$$=2^{n+2}$$

$$a_{n+1}=2^{n+2}-3$$

$\therefore$ $\boxed{a_n=2^{n+1}-3}$ //

3　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n-6$によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_{n+1}=2a_n-6$$
$$-)\quad c=2c-6 \to c=6$$
$$a_{n+1}-c=2(a_n-c)$$

$c=6$を代入して

$$a_{n+1}-6=2(a_n-6)$$

$b_n=a_n-6$とおくと

$$b_{n+1}=2b_n\ (b_1=a_1-6=-5)$$

$$b_n=-5\cdot 2^{n-1}$$

$$a_n-6=-5\cdot 2^{n-1}$$

$\boxed{a_n=-5\cdot 2^{n-1}+6}$ //

別解　$a_{n+1}-6=2(a_n-6)$

$$=2^n(a_1-6)$$
$$=-5\cdot 2^n$$

$$a_{n+1}=-5\cdot 2^n+6$$

$\therefore$ $\boxed{a_n=-5\cdot 2^{n-1}+6}$ //