数列（8）　漸化式②　～応用問題～

とりあえず「誘導」に乗るには　誘導式の番号を１つ上げて、漸化式を代入する。

［1］ $a_{n+1}=pa_n+r^n$ 型　　両辺を r^{n+1} で割れ！

例題１　$a_1=9$，$a_{n+1}=6a_n-3^{n+1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

＜解法①＞　両辺を 3^{n+1} で割る。そして，$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおく。

解　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{6a_n}{3\cdot 3^n}-\dfrac{3^{n+1}}{3^{n+1}}$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおく。

$b_{n+1}=2b_n-1$ $\left(b_1=\dfrac{a_1}{3}=3\right)$

$$\begin{array}{l} -)\ c=2c-1 \\ \hline b_{n+1}-c=2(b_n-c) \end{array} \quad \rightarrow c=1$$

$c=1$ を代入して $b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

$c_n=b_n-1$ とおく。

$c_{n+1}=2c_n$ $(c_1=b_1-1=2)$

$c_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

よって $b_n-1=2^n$

$\therefore b_n=2^n+1$

よって $\dfrac{a_n}{3^n}=2^n+1$

$a_n=3^n(2^n+1)$

$\therefore$ $\boxed{a_n=6^n+3^n}$

＜解法②＞　両辺を 6^{n+1} で割る。そして，$b_n=\dfrac{a_n}{6^n}$ とおく。

$a_1=9$，$a_{n+1}=6a_n-3^{n+1}$

解　$\dfrac{a_{n+1}}{6^{n+1}}=\dfrac{6a_n}{6\cdot 6^n}-\dfrac{3^{n+1}}{6^{n+1}}$

$b_n=\dfrac{a_n}{6^n}$ とおく。

$b_{n+1}=b_n-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ $\left(b_1=\dfrac{a_1}{6}=\dfrac{3}{2}\right)$

$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$b_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ($n=1$ でも成立)

よって $\dfrac{a_n}{6^n}=1+\dfrac{1}{2^n}$

$a_n=6^n\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$

$\therefore$ $\boxed{a_n=6^n+3^n}$

＜解法③＞　$b_n = a_n - 3^n$ とおく。

$a_1 = 9$，$a_{n+1} = 6a_n - 3^{n+1}$

解　$b_{n+1} = a_{n+1} - 3^{n+1}$

$= 6a_n - 3^{n+1} - 3^{n+1}$

$= 6a_n - 3\cdot 3^n - 3\cdot 3^n$

$= 6a_n - 6\cdot 3^n$

$= 6(a_n - 3^n)$

$= 6b_n$

$\therefore\ b_{n+1} = 6b_n\ (b_1 = a_1 - 3 = 6)$

$b_n = 6\cdot 6^{n-1} = 6^n$

よって　$a_n - 3^n = 6^n$　$\therefore\ \boxed{a_n = 6^n + 3^n}$

［2］ 分数形の漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{r a_n}{p a_n + q}$ 型　両辺の逆数をとる

例題２　$a_1 = \dfrac{1}{3}$，$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n + 4}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解　（明らかに $a_n \neq 0$）

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{3a_n + 4}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{4}{a_n} + 3$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおく。

$b_{n+1} = 4b_n + 3\ \left(b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 3\right)$

$-)\ \ c = 4c + 3 \longrightarrow c = -1$

$b_{n+1} - c = 4(b_n - c)$

$c = -1$ を代入して

$b_{n+1} + 1 = 4(b_n + 1)$

$c_n = b_n + 1$ とおく。

$c_{n+1} = 4c_n\ (c_1 = b_1 + 1 = 4)$

$c_n = 4\cdot 4^{n-1} = 4^n$

よって　$b_n + 1 = 4^n$

$b_n = 4^n - 1$

したがって

$\dfrac{1}{a_n} = 4^n - 1$

$\therefore\ \boxed{a_n = \dfrac{1}{4^n - 1}}$