数列（９）　数学的帰納法①

例題１ 数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ。

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

証　[1] $n=1$ のとき　(左辺) $=1$，(右辺) $=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$
よって成立する。

[2] $n=k$ のとき成立すると仮定して

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1)&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}\end{aligned}$$

よって $n=k+1$ のときも成立する。

[1][2] より すべての自然数 n で

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\ //$$

１ 数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

証　[1] $n=1$ のとき (左辺) $=1^2=1$，(右辺) $=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$ より成立。

[2] $n=k$ のとき成立すると仮定して

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\&=\frac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}\\&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}\end{aligned}$$

よって $n=k+1$ のときも成立。

[1][2] より すべての自然数 n で $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\ //$

例題2 n は自然数とする。n^3+2n は3の倍数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

証 [1] $n=1$ のとき 与式 $=1^3+2=3$ となり 成立。

[2] $n=k$ のとき成立すると仮定して

$$k^3+2k=3m \quad (m\text{は整数})$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}(k+1)^3+2(k+1) &= k^3+3k^2+3k+1+2k+2\\ &= k^3+2k+3(k^2+k+1)\\ &= 3m+3(k^2+k+1)\\ &= 3(m+k^2+k+1)\end{aligned}$$

よって $n=k+1$ のときも成立する。

[1][2] より すべての自然数 n で n^3+2n は3の倍数 //

2 n は自然数とする。5^n-1 は4の倍数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

証 [1] $n=1$ のとき 与式 $=5-1=4$ となり 成立。

[2] $n=k$ のとき 成立すると仮定して

$$5^k-1=4m \quad (m\text{は整数})$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}5^{k+1}-1 &= 5\cdot 5^k-1\\ &= 5(4m+1)-1\\ &= 20m+4\\ &= 4(5m+1)\end{aligned}$$

よって $n=k+1$ のときも成立。

[1][2] より すべての自然数 n で 5^n-1 は4の倍数 //