1 数列（1）プリントより

第２項が７，第９項が -28 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (8点)

$a_2 = a + d = 7 \quad \cdots ①$

$a_9 = a + 8d = -28 \quad \cdots ②$

①−② より $-7d = 35 \quad \therefore d = -5$

① より $a - 5 = 7 \quad \therefore a = 12$

$a_n = 12 + (n-1)\cdot(-5)$

$= 12 - 5n + 5 = \boxed{-5n + 17}$

2 数列（1）プリントより

次の等差数列の和 S を求めよ。 (8点)

$-40, -33, -26, \cdots\cdots, 93$

$a_n = -40 + (n-1)\cdot 7$

$= 7n - 47$

$7n - 47 = 93$

$7n = 140$

$n = 20$

$S = \dfrac{20(-40+93)}{2}$

$= 10 \times 53$

$= \boxed{530}$

3 数列（1）プリントより

初項が 70，公差が -4 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。 (各4点)

(1) 一般項 a_n を求めよ。

$a_n = 70 + (n-1)\cdot(-4)$

$= \boxed{-4n + 74}$

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和を求めよ。

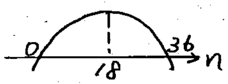
$a_n > 0 \Leftrightarrow -4n + 74 > 0$

$n < \dfrac{37}{2} \left(= 18\dfrac{1}{2}\right)$

よって $\boxed{\text{第18項まで}}$

$S_{18} = \dfrac{18\{2\cdot 70 + 17\cdot(-4)\}}{2} = 9 \times 72 = \boxed{648}$

<別解> $S_n = \dfrac{n\{2\cdot 70 + (n-1)\cdot(-4)\}}{2} = -2n(n-36)$



$n = 18$ で Max 648

4 数列（1）プリントより

第４項が -40，第６項が -160 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (8点)

$a_4 = ar^3 = -40 \quad \cdots ①$

$a_6 = ar^5 = -160 \quad \cdots ②$

②÷① より $r^2 = 4 \quad \therefore r = \pm 2$

よって $(a, r) = (-5, 2), (5, -2)$

$\boxed{a_n = -5\cdot 2^{n-1} \text{ または } a_n = 5\cdot(-2)^{n-1}}$

5 数列（1）プリントより

第３項が６，初項から第３項までの和が 78 である等比数列の初項と公比を求めよ。 (8点)

$\begin{cases} ar^2 = 6 & \cdots ① \\ a + ar + ar^2 = 78 & \cdots ② \end{cases}$

② より $a(1 + r + r^2) = 78$

$ar^2(1 + r + r^2) = 78r^2$

① より $6(1 + r + r^2) = 78r^2$

$1 + r + r^2 = 13r^2$

$12r^2 - r - 1 = 0$

$(3r - 1)(4r + 1) = 0 \quad \therefore r = \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}$

よって $\boxed{\begin{cases} \text{初項 } 54 \\ \text{公比 } \frac{1}{3} \end{cases} \text{ または } \begin{cases} \text{初項 } 96 \\ \text{公比 } -\frac{1}{4} \end{cases}}$

6 数列（2）プリントより

次の和を求めよ。 (各6点)

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2 - 6k + 5)$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6\cdot\dfrac{n(n+1)}{2} + 5n$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1) - 18n(n+1) + 30n}{6}$

$= \dfrac{n\{2n^2 + 3n + 1 - 18(n+1) + 30\}}{6}$

$= \dfrac{n(2n^2 - 15n + 13)}{6}$

$= \boxed{\dfrac{n(n-1)(2n-13)}{6}}$

(2) $1^2\cdot 1 + 2^2\cdot 3 + 3^2\cdot 5 + \cdots\cdots + n^2(2n-1)$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k^3 - k^2)$

$= \overset{1}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{n^2(n+1)^2}{\cancel{4}\,2} - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \dfrac{3n^2(n+1)^2 - n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \dfrac{n(n+1)\{3n(n+1) - (2n+1)\}}{6}$

$= \boxed{\dfrac{n(n+1)(3n^2 + n - 1)}{6}}$

7 数列（4）プリントより

階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (8点)

$\{a_n\}$: 4, 5, 8, 17, 44, ……

$\{b_n\}$: 1 3 9 27　　$b_n = 3^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき $a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$

$= 4 + \frac{3^{n-1}-1}{3-1}$

$= \boxed{\frac{3^{n-1}+7}{2}}$ ($n=1$でも成立)

8 数列（4）プリントより

初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = n^2 - 4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (8点)

$a_1 = S_1 = -3$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 - 4n - \{(n-1)^2 - 4(n-1)\}$

$= n^2 - 4n - (n^2 - 6n + 5)$

$= \boxed{2n-5}$ ($n=1$でも成立)

9 数列（5）プリントより

次の和 S を求めよ。 (8点)

$$S = \frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{5\cdot8} + \frac{1}{8\cdot11} + \cdots\cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$S = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{3n+2-2}{2(3n+2)}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{3n}{2(3n+2)} = \boxed{\frac{n}{2(3n+2)}}$

10 数列（5）プリントより

次の和 S を求めよ。 (6点)

$$S = 1\cdot1 + 3\cdot2 + 5\cdot2^2 + \cdots\cdots + (2n-1)\cdot2^{n-1}$$

$-)\ 2S = \quad 1\cdot2 + 3\cdot2^2 + \cdots + (2n-3)2^{n-1} + (2n-1)2^n$

$-S = 1 + 2\cdot2 + 2\cdot2^2 + \cdots + 2\cdot2^{n-1} - (2n-1)2^n$

$= 1 + 2(2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) + (-2n+1)2^n$

$= 1 + 2 \times \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} + (-2n+1)2^n$

$= 1 + 2(2^n - 2) + (-2n+1)2^n$

$= 1 + 2\cdot2^n - 4 + (-2n+1)2^n$

$-S = (-2n+3)2^n - 3$

$S = \boxed{(2n-3)2^n + 3}$

11 数列（7）プリントより

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (6点)

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 4n + 3$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k+3)$

$= 2 + 4\cdot\frac{n(n-1)}{2} + 3(n-1)$

$= 2 + 2n(n-1) + 3n - 3$

$= \boxed{2n^2 + n - 1}$ ($n=1$でも成立)

12 数列（7）プリントより

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (6点)

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$

$-)\ c = 2c - 1 \longrightarrow c = 1$

$a_{n+1} - c = 2(a_n - c)$

$c=1$を代入 $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$

$b_n = a_n - 1$ とおく。

$b_{n+1} = 2b_n$ ($b_1 = a_1 - 1 = 3$)

$b_n = 3\cdot2^{n-1}$

$a_n - 1 = 3\cdot2^{n-1}$

$\boxed{a_n = 3\cdot2^{n-1} + 1}$

13 数列（8）プリントより

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (6点)

$a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n + 5}$

(明らかに $a_n \neq 0$)

$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4a_n + 5}{a_n}$

$\frac{1}{a_{n+1}} = 5\cdot\frac{1}{a_n} + 4$

$b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく。

$b_{n+1} = 5b_n + 4$ ($b_1 = \frac{1}{a_1} = 2$)

$-)\ c = 5c + 4 \longrightarrow c = -1$

$b_{n+1} - c = 5(b_n - c)$

$c=-1$代入 $b_{n+1} + 1 = 5(b_n + 1)$

$c_n = b_n + 1$ とおく。 $c_{n+1} = 5c_n$ ($c_1 = b_1 + 1 = 3$)

よって $c_n = 3\cdot5^{n-1}$

もどして $b_n + 1 = 3\cdot5^{n-1}$

$b_n = 3\cdot5^{n-1} - 1$

もどして $\frac{1}{a_n} = 3\cdot5^{n-1} - 1$

$\boxed{a_n = \frac{1}{3\cdot5^{n-1} - 1}}$