ベクトル（1）～（4）の復習

$\boxed{1}$ $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$ であり，2つのベクトル $\vec{a}+\vec{b}$ と $3\vec{a}-2\vec{b}$ は直交しているとする。このとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値，および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ を求めよ。

解答 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\theta=45°$

$$0=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$$
$$=3|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2$$
$$=3+\vec{a}\cdot\vec{b}-4 \qquad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\underline{1}$$
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\underline{\theta=45°}$$

$\boxed{2}$ ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$，$\vec{c}=(-1,\ 3)$ について2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}+k\vec{c}$ が垂直であるとき，実数 k の値を求めよ。

解答 $k=\frac{4}{5}$

$$\vec{a}=(1,2)\ ,\ \vec{b}+k\vec{c}=(2,-3)+k(-1,3)$$
$$=(2-k,\ -3+3k)$$
$$0=\vec{a}\cdot(\vec{b}+k\vec{c})$$
$$=(2-k)+2(-3+3k)$$
$$=5k-4 \qquad \therefore \underline{k=\frac{4}{5}}$$

$\boxed{別解}$

$$0=\vec{a}\cdot(\vec{b}+k\vec{c})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{b}+k\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$=-4+5k$$
$$\underline{k=\frac{4}{5}}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2-6$
$=-4$
$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1+6$
$=5$

$\boxed{3}$ $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$ を満たすベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を考える。実数 t に対して，$\vec{c}=t\vec{a}+\vec{b}$ とおくとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ア$\boxed{}$ であり，$|\vec{c}|$ は $t=$ イ$\boxed{}$ のとき最小値 ウ$\boxed{}$ をとる。

解答 (ア) -5 (イ) $\frac{5}{4}$ (ウ) $\frac{\sqrt{11}}{2}$

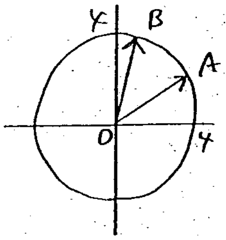
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\sqrt{3})^2$$
$$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3$$
$$4+2\vec{a}\cdot\vec{b}+9=3$$
$$2\vec{a}\cdot\vec{b}=-10 \qquad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\underline{-5}$$
$$|\vec{c}|^2=|t\vec{a}+\vec{b}|^2$$
$$=t^2|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$=4t^2-10t+9$$
$$=4\left(t-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{4}+9$$
$$=4\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{11}{4}$$

$t=\frac{5}{4}$ のとき
Min $\underline{\frac{\sqrt{11}}{2}}$

$\boxed{4}$ 原点を O とする座標平面上に曲線 $C: x^2+y^2=16$ があり，C 上の2点 A，B が $\cos\angle AOB=\frac{3}{4}$ を満たす。

このとき，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=$ ア$\boxed{}$，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=$ イ$\boxed{}$ であり，$\triangle OAB$ の面積は ウ$\boxed{}$ である。

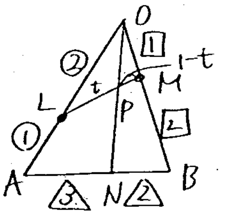
解答 (ア) 4 (イ) $2\sqrt{14}$ (ウ) $2\sqrt{7}$



$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\underline{4}$$
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4\times4\times\frac{3}{4}$$
$$=12$$
$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$$
$$=16+24+16$$
$$=56$$
$$\therefore |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=\underline{2\sqrt{14}}$$
$$\sin^2\angle AOB=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$$
$$\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{7}}{4}$$
$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\underline{2\sqrt{7}}$$

5 △OABにおいて，辺OAを2：1に内分する点をL，辺OBを1：2に内分する点をM，辺ABを3：2に内分する点をNとする。線分LMと線分ONの交点をPとするとき，$\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$を用いて表せ。

解答 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$



$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OL}+t\overrightarrow{OM}$

$=\frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{OA}+\frac{t}{3}\overrightarrow{OB}\ \cdots ①$

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{ON}=k\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\frac{2}{5}k\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}k\overrightarrow{OB}\ \cdots ②$

①，②より $\begin{cases}\frac{2}{3}(1-t)=\frac{2}{5}k\\ \frac{t}{3}=\frac{3}{5}k\end{cases}$ $\therefore k=\frac{5}{12},\ t=\frac{3}{4}$

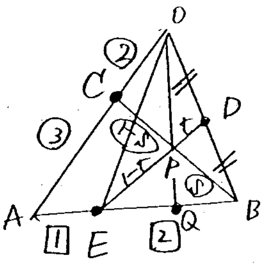
よって $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$

6 △OABの辺OAを2：3に内分する点をC，辺OBの中点をD，辺ABを1：2に内分する点をEとし，線分BCと線分DEの交点をPとする。

(1) $\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$で表せ。

(2) 線分OPの延長と辺ABとの交点をQとするとき，$\overrightarrow{OQ}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$で表せ。

解答 (1) $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}$ (2) $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$



(1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OC}+(1-s)\overrightarrow{OB}$

$=\frac{2}{5}s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OB}\ \cdots ①$

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OE}+(1-t)\overrightarrow{OB}$

$=t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right)\overrightarrow{OB}$

$=\frac{2}{3}t\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{6}\right)\overrightarrow{OB}\ \cdots ②$

①，②より $\begin{cases}\frac{2}{5}s=\frac{2}{3}t\\ 1-s=\frac{1}{2}-\frac{t}{6}\end{cases}$ $\therefore t=\frac{1}{3},\ s=\frac{5}{9}$

よって $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}$

(2) $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}k\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}k\overrightarrow{OB}$

$\frac{2}{9}k+\frac{4}{9}k=1$ $\therefore k=\frac{3}{2}$

よって $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

7 △OABにおいて，辺AB上に$t\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ $(0<t<1)$となる点Cをとる。OA＝1，OB＝2，OC＝1のとき，次の問いに答えよ。

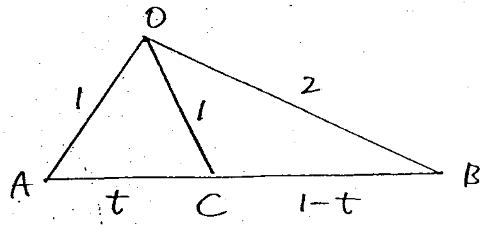
(1) $\overrightarrow{OC}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$およびtを用いて表せ。

(2) 内積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$を$t$を用いて表せ。

(3) AC＝1のとき，tの値を求めよ。

解答 (1) $\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{2-5t}{2(1-t)}$

(3) $t=\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$



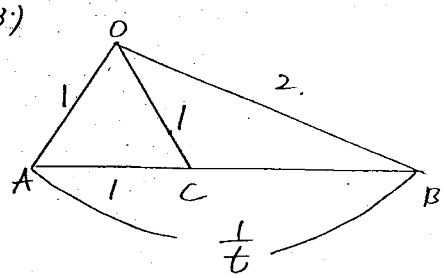
(1) $\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

(2) $|\overrightarrow{OC}|^2=|(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}|^2=1^2$

$(1-t)^2+2t(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4t^2=1$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{2-5t}{2(1-t)}$

(3)



$|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{t}|\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{t}$

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=\left(\frac{1}{t}\right)^2$

$4-2\cdot\frac{2-5t}{2(1-t)}+1=\frac{1}{t^2}$

$5-\frac{2-5t}{1-t}=\frac{1}{t^2}$

$5t^2(1-t)-t^2(2-5t)=1-t$

$3t^2+t-1=0$

$0<t<1$ より $t=\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$