# ベクトル（1）　「3点セット」を使いこなす①

[1]　ベクトルの演算は「3点セット」$|\vec{a}|$ , $|\vec{b}|$ , $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用意せよ！！

<成分を使って3点セットを求める>

① $\vec{a}=(a_1, a_2)$ のとき

$$|\vec{a}|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2}$$

② $\vec{a}=(a_1, a_2)$ , $\vec{b}=(b_1, b_2)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

<成分を使わないとき>　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ のとき $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

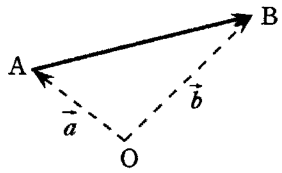
※なす角を求めるとき $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

**重要**　ベクトルの垂直条件　$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

[2]　ベクトルの減法で「始点の変更」ができる！！

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\boxed{\phantom{O}}B}-\overrightarrow{\boxed{\phantom{O}}A}$　※逆順で引け！

空欄に入る始点は、自由に決めることができる。




これを利用して

2点$A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ があるとき　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$

$\boxed{1}$　$\vec{a}=(4, -3)$, $\vec{b}=(2, 1)$ に対して，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{ア}$ である。$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ （$t$ は実数）とすると，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ が垂直であるとき，$t=\boxed{イウ}$ であり，$|\vec{p}|$ が最小となるとき，$t=\boxed{エオ}$ である。

**解①**　成分で解く。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=8-3=\underline{5}$ (ア)

$\vec{p}=(4,-3)+t(2,1)$

$=(4+2t, -3+t)$

垂直条件 $0=\vec{a}\cdot\vec{p}$

$=4(4+2t)-3(-3+t)$

$0=25+5t$

$\therefore \underline{t=-5}$ (イウ)

$|\vec{p}|=\sqrt{(4+2t)^2+(-3+t)^2}$

$=\sqrt{5t^2+10t+25}$

$=\sqrt{5(t+1)^2+20}$

$\underline{t=-1}$ で最小 (エオ)

**解②**　「3点セット」で解く。

$$\begin{cases}|\vec{a}|=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5\\|\vec{b}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}\\\vec{a}\cdot\vec{b}=\underline{5}\end{cases}$$

垂直条件 $0=\vec{a}\cdot\vec{p}$

$=\vec{a}\cdot(\vec{a}+t\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}$

$0=25+5t$

$\therefore \underline{t=-5}$

$|\vec{p}|^2=|\vec{a}+t\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$=25+10t+5t^2$

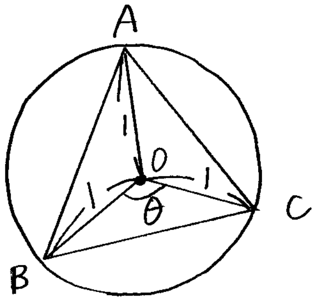
$=5(t+1)^2+20$

$\underline{t=-1}$ で最小

$\boxed{2}$ 定点Oを中心とする半径が1である円周上に，3点A，B，Cがあって，$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たしている。

（1） $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積は $\boxed{\phantom{00}}$，$\triangle OBC$ の面積は $\boxed{\phantom{00}}$ である。

（2） 線分BCの長さは $\boxed{\phantom{00}}$ である。　　　　(近畿大)




$\boxed{解}$ (1) $|3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}|^2=|-2\overrightarrow{OA}|^2$

$$9|\overrightarrow{OB}|^2+24\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+16|\overrightarrow{OC}|^2=4|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$9+24\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+16=4$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{7}{8}$$

<3点セット>

$|\overrightarrow{OB}|=1$

$|\overrightarrow{OC}|=1$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{7}{8}$

$\angle BOC=\theta$ とおく。

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{-\frac{7}{8}}{1\times1}=-\frac{7}{8}$$

$$\sin^2\theta=1-\left(-\frac{7}{8}\right)^2=\frac{15}{64}\quad\therefore\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

よって $\triangle OBC=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{\sqrt{15}}{16}$

( <別解> 発展公式 $S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1\times1-\frac{49}{64}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{64}}=\frac{\sqrt{15}}{16}$$ )

(2) $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2$

$$=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$=1-2\times\left(-\frac{7}{8}\right)+1$$

$$=1+\frac{7}{4}+1=\frac{15}{4}\quad\therefore|\overrightarrow{BC}|=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

( <別解> $\triangle OBC$ で余弦定理より

$$BC^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\left(-\frac{7}{8}\right)$$

$$=1+1+\frac{7}{4}=\frac{15}{4}\quad\therefore BC=\frac{\sqrt{15}}{2}$$ )