ベクトル（2）　「3点セット」を使いこなす②

$\boxed{1}$ 2つのベクトル $\vec{a}=(5,1)$, $\vec{b}=(-3,2)$ の内積と，なす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ。(足利工大)

<3点セット>

$$\boxed{\begin{array}{l} |\vec{a}|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26} \\ |\vec{b}|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13} \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-15+2=-13 \end{array}}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-13}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\theta = 135^\circ$ //

$\boxed{2}$ ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ とする。このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。
また，実数 t に対して，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。(西南学院大)

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\sqrt{5})^2$$

$$3-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=5$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$$

<3点セット>

$$\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{3},\ |\vec{b}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1}$$

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=3+2t+4t^2 = 4\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{4}$$

よって

Min $\frac{\sqrt{11}}{2}$ $\left(t=-\frac{1}{4}\right)$ //

$\boxed{3}$ $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$2|\vec{a}|=3|\vec{b}|$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° とする。
$\vec{a}+\vec{b}$ と $7\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直であるとき，t の値を求めよ。(福岡大)

< 3点セット>

$$\boxed{\begin{array}{l} |\vec{a}| \\ |\vec{b}|=\frac{2}{3}|\vec{a}| \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times\frac{2}{3}|\vec{a}|\times\frac{1}{2} \\ \qquad =\frac{1}{3}|\vec{a}|^2 \end{array}}$$

垂直条件 $0=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(7\vec{a}+t\vec{b})$

$$=7|\vec{a}|^2+\frac{t}{3}|\vec{a}|^2+\frac{7}{3}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}t|\vec{a}|^2$$

$$0=7+\frac{t}{3}+\frac{7}{3}+\frac{4}{9}t$$

$$0=63+3t+21+4t$$

$$-7t=84$$

$t=-12$ //

$\boxed{4}$ 平面上の３点O，A，Bが$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}|=1$を満たしているとする。

$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$の内積は$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{}$である。また，$|\overrightarrow{OB}|=\boxed{}$である。

したがって，$|\overrightarrow{AB}|=\boxed{}$であり，△$OAB$の面積は$\boxed{}$である。　(センター追試験)

解

$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2$$

$$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=4|\overrightarrow{OA}|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$1+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3 \qquad \therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\underline{-\frac{3}{2}}$$

$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=1^2$$

$$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=1$$

$$1+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+|\overrightarrow{OB}|^2=1$$

$$|\overrightarrow{OB}|^2=3 \qquad \therefore |\overrightarrow{OB}|=\underline{\sqrt{3}}$$

〈3点セット〉

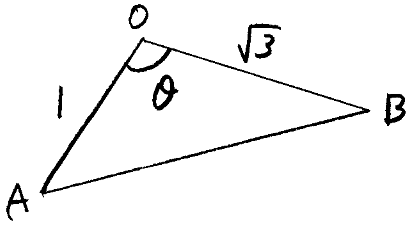
$$\boxed{\begin{aligned}|\overrightarrow{OA}|&=1\\ |\overrightarrow{OB}|&=\sqrt{3}\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=-\frac{3}{2}\end{aligned}}$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$$

$$=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$=3-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+1$$

$$=7 \qquad \therefore |\overrightarrow{AB}|=\underline{\sqrt{7}}$$



$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

$$=\frac{-\frac{3}{2}}{1\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \theta=150^\circ$$

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times\sin150^\circ=\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

(＜別解　$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1\times3-\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$)