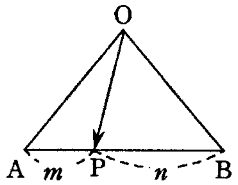
ベクトル（3）　内分・外分・中点・重心

① AB を $m:n$ に内分する点 P は

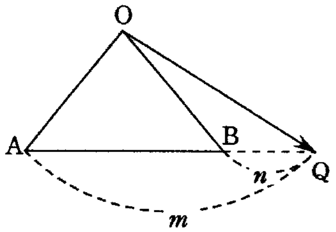
$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$



※特に、AB の中点 M は $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

② AB を $m:n$ に外分する点 Q は

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{-n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m-n}$$

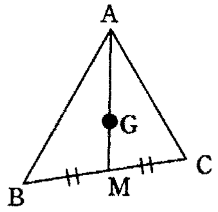


<三角形の重心>

$\triangle ABC$ の重心を G とするとき

①頂点 A を始点として

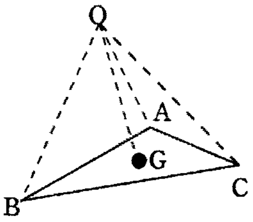
$$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$$



$\left(=\dfrac{\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\right.$ と見ることができる。）

②点 O を始点として

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

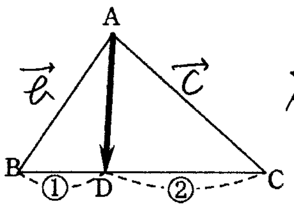


※「始点を統一する」がポイント。

1　△ABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点を D，外分する点を E とし，△ABC の重心を G とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{AD}$

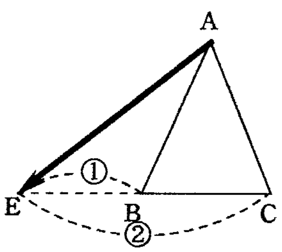
B　C
1 : 2



$$\overrightarrow{AD}=\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

(2) $\overrightarrow{AE}$

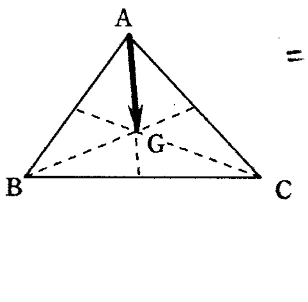
B　C
-1 : 2



$$\overrightarrow{AE}=\frac{2\vec{b}-\vec{c}}{-1+2}$$

$$=2\vec{b}-\vec{c}$$

(3) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$



$$=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

(4) $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG}$

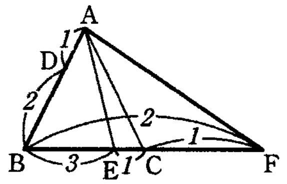
$$=\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\vec{b}$$

$\boxed{2}$ △ABCの辺ABを1：2に内分する点をD，辺BCを3：1に内分する点をE，辺BCを2：1に外分する点をFとすると，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AF}=\boxed{キ}\overrightarrow{AB}+\boxed{ク}\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{DE}=\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サシ}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\overrightarrow{AC}$ である。



$\boxed{解}$ ① $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ //(アイ)

② $\overrightarrow{AE}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+1}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ //(ウ～カ)

③ $\boxed{\begin{array}{cc} B & C \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 2 & :(-1) \end{array}}$ $\overrightarrow{AF}=\dfrac{-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{2-1}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ //(キク)

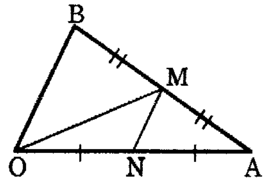
④ $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$

$=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$=-\dfrac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ //(ケ～セ)

$\boxed{3}$ △OABの辺ABの中点をM，辺OAの中点をNとして，△OMNの重心をGとすると $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{ON}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{OB}$ である。



$\boxed{解}$ ① $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ //(ア～エ)

② $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ //(オカ)

③ $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$ //(キ～コ)