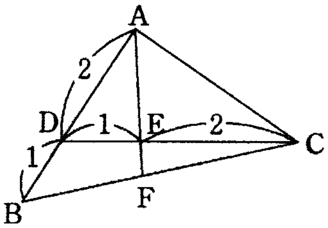
ベクトル（5）　２直線の交点②

1　$\triangle$ABCにおいて，ABを２：１に内分する点をD，DCを１：２に内分する点をEとし，直線AEと直線BCの交点をFとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{AF}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。



解　$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{b}\right)+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AE}=\frac{4}{9}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}$

FはBC上の点だから　$\frac{4}{9}k+\frac{1}{3}k=1$　$\therefore k=\frac{9}{7}$

よって　$\overrightarrow{AF}=\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}$ //

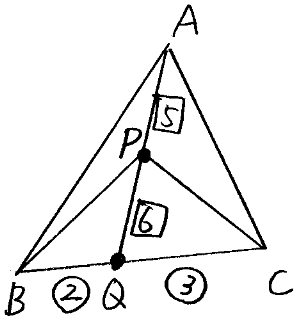
2　$\triangle$ABCと点Pに対して，等式$6\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$が成り立っている。

(1)　点Pの位置をいえ。

(2)　面積比 $\triangle$PBC：$\triangle$PCA：$\triangle$PAB を求めよ。

解　(1)　$6\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{11}\overrightarrow{AC}$



直線APとBCの交点をQとする。

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}=\frac{3}{11}k\overrightarrow{AB}+\frac{2}{11}k\overrightarrow{AC}$

QはBC上の点だから

$\frac{3}{11}k+\frac{2}{11}k=1$　$\therefore k=\frac{11}{5}$

よって　BCを２：３に内分する点をQとしてAQを５：６に内分する点 //

(2)　$\triangle PBC=\frac{6}{11}\triangle ABC$ …①

$\triangle PCA=\frac{3}{5}\times\frac{5}{11}\triangle ABC=\frac{3}{11}\triangle ABC$ …②

$\triangle PAB=\frac{2}{5}\times\frac{5}{11}\triangle ABC=\frac{2}{11}\triangle ABC$ …③

①〜③より　$\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=\frac{6}{11}:\frac{3}{11}:\frac{2}{11}$

$=6:3:2$ //

$\boxed{3}$ 平面上の△ABCと点Pが $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしているとする。このとき，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ウ}}$ であるから，直線APと辺BCの交点をDとすると

BD：DC＝$\boxed{エ}$：3であり，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{AD}$ となる。

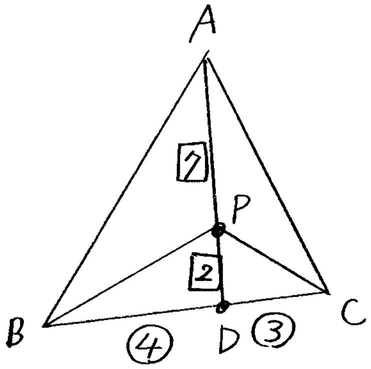
このとき，面積比△ABP：△BCP：△CAP＝$\boxed{キ}$：2：$\boxed{ク}$ である。

$\boxed{解}$

$$-2\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+4(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$

$$-9\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}$$ //(アイウ)



$$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}$$
$$=\frac{3}{9}k\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}k\overrightarrow{AC}$$

DはBC上の点だから

$$\frac{3}{9}k+\frac{4}{9}k=1 \quad \therefore k=\frac{9}{7}$$

よって $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$

ゆえに BD：DC＝4：3 //(エ)，$\overrightarrow{AP}=\frac{7}{9}\overrightarrow{AD}$ //(オカ)

このとき

$$\triangle ABP=\frac{4}{7}\times\frac{7}{9}\triangle ABC=\frac{4}{9}\triangle ABC \quad \cdots①$$

$$\triangle BCP=\frac{2}{9}\triangle ABC \quad \cdots②$$

$$\triangle CAP=\frac{3}{9}\triangle ABC \quad \cdots③$$

①〜③より △ABP：△BCP：△CAP

$$=\frac{4}{9}:\frac{2}{9}:\frac{3}{9}$$

$$=4:2:3$$ //(キク)