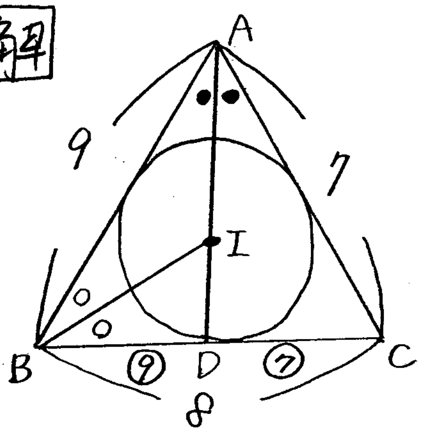
1　$AB=9$, $BC=8$, $CA=7$ である $\triangle ABC$ の内接円の中心を I とする。$\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(静岡大)

解



$BD:DC=9:7$ だから

AI と BC の交点を D として

$$\overrightarrow{AD}=\frac{7}{16}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{16}\overrightarrow{AC}$$

また、$BD=8\times\frac{9}{16}=\frac{9}{2}$

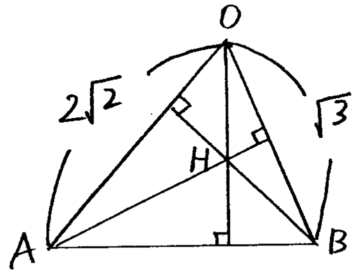
よって $AI:ID=9:\frac{9}{2}=2:1$

したがって

$$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{16}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{16}\overrightarrow{AC}\right)$$
$$=\frac{7}{24}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$$

2　$OA=2\sqrt{2}$, $OB=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ である $\triangle OAB$ の垂心を H とするとき, $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ で表せ。

解



$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とおく。

$$\boxed{0=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BH}}$$
$$=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})$$
$$=\overrightarrow{OA}\cdot(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB})$$
$$=8s+2t-2 \qquad \therefore 4s+t=1 \cdots ①$$

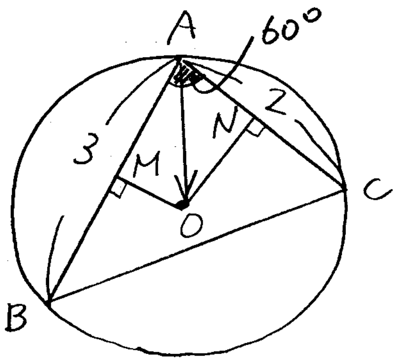
$$\boxed{0=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AH}}$$
$$=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\overrightarrow{OB}\cdot(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$=2s+3t-2 \qquad \therefore 2s+3t=2 \cdots ②$$

①, ②より

$$\begin{array}{rl} 12s+3t &= 3 \\ -)\ \ 2s+3t &= 2 \\ \hline 10s &= 1 \end{array} \qquad \therefore s=\frac{1}{10},\ t=\frac{3}{5}$$

よって $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{10}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

[3] △ABCにおいて，AB=3，AC=2，∠A=60°，外心をOとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



$\boxed{解}$ $\overrightarrow{AO}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおく。

3点セット

$$\boxed{\begin{aligned}&|\vec{b}|=3\\&|\vec{c}|=2\\&\vec{b}\cdot\vec{c}=3\times2\times\frac{1}{2}=3\end{aligned}}$$

AB，ACの中点をそれぞれM，Nとする。

$$\boxed{0=\vec{b}\cdot\overrightarrow{OM}}$$

$$=\vec{b}\cdot(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AO})$$

$$=\vec{b}\cdot\left\{\frac{1}{2}\vec{b}-(s\vec{b}+t\vec{c})\right\}$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{b}|^2-s|\vec{b}|^2-t\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$0=\frac{9}{2}-9s-3t$$

$$0=9-18s-6t \quad \therefore\ 6s+2t=3 \ \cdots①$$

$$\boxed{0=\vec{c}\cdot\overrightarrow{ON}}$$

$$=\vec{c}\cdot(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AO})$$

$$=\vec{c}\cdot\left\{\frac{1}{2}\vec{c}-(s\vec{b}+t\vec{c})\right\}$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}-t|\vec{c}|^2$$

$$0=2-3s-4t \qquad \therefore\ 3s+4t=2 \ \cdots②$$

①，②より

$$\begin{array}{rrcl} & 12s+4t&=&6\\ -) & 3s+4t&=&2\\ \hline & 9s&=&4\end{array} \qquad \therefore\ s=\frac{4}{9},\ t=\frac{1}{6}$$

よって $\underline{\overrightarrow{AO}=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}$ //