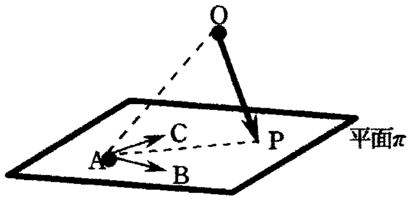
ベクトル（7）　空間のベクトル方程式



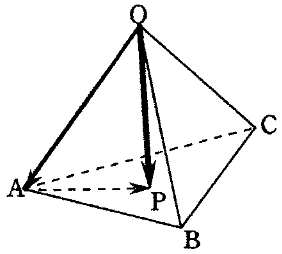
O から P まで行くには

[1]　まず、平面π上の点に降りる。(点A)

[2]　次に、平面上を進んでPへ行く。(主方向は$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$)

＜共面条件 Part 1＞　Pが平面 ABC 上にあるとき

$$\overrightarrow{OP}=\underbrace{\overrightarrow{OA}}_{\boxed{\text{空港へ着陸}}}+\underbrace{s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}}_{\boxed{\text{空港内を歩く}}}$$



始点を O にそろえると　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

整理して　$\overrightarrow{OP}=\underline{(1-s-t)}\overrightarrow{OA}+\underline{s}\,\overrightarrow{OB}+\underline{t}\,\overrightarrow{OC}$

係数の和が１になっているのが特徴

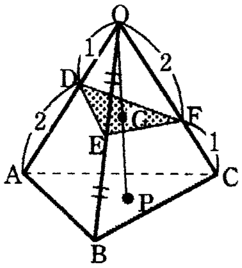
$r=1-s-t$ とおいて、次を得る。

＜共面条件 Part 2＞
Pが平面 ABC 上にあるとき
$\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$　(ただし $r+s+t=1$)

※問題によって「Part 1」と「Part 2」を使い分けるのだが、「Part 1」の方が使用頻度が高い。

※「Part 2」から学ぶべきは、主方向３つのベクトルの「係数の和が１」という事実。

1　四面体 OABC の辺 OA, OB, OC をそれぞれ 1：2, 1：1, 2：1 に内分する点を順に D, E, F とする。頂点 O と △DEF の重心 G を通る直線が, 3 点 A, B, C の定める平面 ABC と交わる点を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ で表せ。



解

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}=k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OF}\right)$$

$$=\frac{1}{9}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OB}+\frac{2}{9}k\overrightarrow{OC}\quad\cdots①$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

$$=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}\quad\cdots②$$

①, ② より
$$\begin{cases}1-s-t=\frac{1}{9}k & \cdots③\\ s=\frac{1}{6}k & \cdots④\\ t=\frac{2}{9}k & \cdots⑤\end{cases}$$

③+④+⑤ より
$$\frac{1}{9}k+\frac{1}{6}k+\frac{2}{9}k=1$$
$$\therefore k=2,\ s=\frac{1}{3},\ t=\frac{4}{9}$$

よって　$\underline{\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OC}}$ //

(＜別解＞　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{9}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OB}+\frac{2}{9}k\overrightarrow{OC}\quad\cdots①$

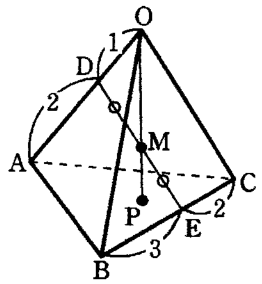
P は平面 ABC 上の点だから　$\frac{1}{9}k+\frac{1}{6}k+\frac{2}{9}k=1\quad\therefore k=2$

よって　$\underline{\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OC}}$ //)

$\boxed{2}$ 四面体OABCの辺OAを1：2に内分する点をD，辺BCを3：2に内分する点をE，線分DEの中点をMとし，直線OMと平面ABCの交点をPとする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。



$\boxed{解}$ (1)

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}\right)$$
$$=\underline{\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{3}{10}\vec{c}}$$

(2)

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OM}=\frac{1}{6}k\vec{a}+\frac{1}{5}k\vec{b}+\frac{3}{10}k\vec{c}\quad\cdots①$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$$
$$=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\quad\cdots②$$

①，②より
$$\begin{cases}1-s-t=\frac{1}{6}k\\ s=\frac{1}{5}k\\ t=\frac{3}{10}k\end{cases}$$

$\therefore\ k=\frac{3}{2}，s=\frac{3}{10}，t=\frac{9}{20}$

よって $\overrightarrow{OP}=\underline{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{10}\vec{b}+\frac{9}{20}\vec{c}}$

（<別解> $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}k\vec{a}+\frac{1}{5}k\vec{b}+\frac{3}{10}k\vec{c}\quad\cdots①$

Pは平面ABC上の点だから

$$\frac{1}{6}k+\frac{1}{5}k+\frac{3}{10}k=1\quad\therefore\ k=\frac{3}{2}$$

よって $\overrightarrow{OP}=\underline{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{10}\vec{b}+\frac{9}{20}\vec{c}}$ ）