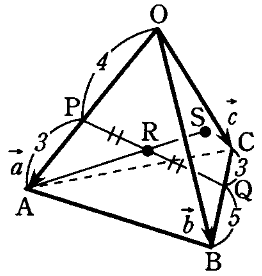
ベクトル（8）　空間ベクトル演習

1　正四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。
辺 OA を 4 : 3 に内分する点を P，辺 BC を 5 : 3 に内分する点を Q とする。

このとき，$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{c}$ である。

線分 PQ の中点を R とし，直線 AR が △OBC の定める平面と交わる点を S とする。このとき，AR : AS $=\boxed{\text{ク}}:\boxed{\text{ケ}}$ である。



解

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$

$$=\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}-\frac{4}{7}\vec{a}=\underline{-\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}}$$ （ア〜キ）

ポイント　$\overrightarrow{AS}=k\overrightarrow{AR}$

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS}$$
$$=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AR}$$
$$=\vec{a}+k(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\vec{a}+k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}\right)-k\vec{a}$$
$$=\vec{a}+\frac{k}{2}\cdot\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{k}{2}\cdot\left(\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}\right)-k\vec{a}$$
$$=\vec{a}+\frac{2}{7}k\vec{a}+\frac{3}{16}k\vec{b}+\frac{5}{16}k\vec{c}-k\vec{a}$$
$$=\left(1-\frac{5}{7}k\right)\vec{a}+\frac{3}{16}k\vec{b}+\frac{5}{16}k\vec{c}\quad\cdots①$$

また，S は △OBC 上だから $\overrightarrow{OS}=s\vec{b}+t\vec{c}\quad\cdots②$

①，② より　$1-\frac{5}{7}k=0$　∴ $k=\frac{7}{5}$　∴ AR : AS $=\underline{5:7}$ //

（<別解>

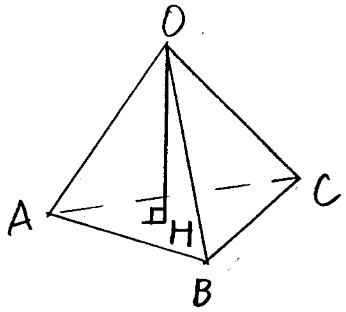
$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AR}$$
$$=\vec{a}+k\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PR}\right)$$
$$=\vec{a}+k\left(-\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}\right)$$
$$=\vec{a}+k\left(-\frac{3}{7}\vec{a}-\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}+\frac{5}{16}\vec{c}\right)$$
$$=\left(1-\frac{5}{7}k\right)\vec{a}+\frac{3}{16}k\vec{b}+\frac{5}{16}k\vec{c}$$

<以下略>）

2 3点 A(2, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, −2) の定める平面 ABC に，原点 O から垂線OH を下ろす。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標を求めよ。　(2) 線分 OH の長さを求めよ。

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。　(4) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。



解 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$

$= (2,0,0) + s(-2,1,0) + t(-2,0,-2)$

$= (2-2s-2t,\ s,\ -2t)$

$\overrightarrow{AB} = (-2,1,0),\ \overrightarrow{AC} = (-2,0,-2)$

$\boxed{0 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OH}} = -2(2-2s-2t)+s = 5s+4t-4$

$\therefore\ 5s+4t=4 \cdots ①$

$\boxed{0 = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OH}} = -2(2-2s-2t)+4t = 4s+8t-4$

$\therefore\ s+2t=1 \cdots ②$

①, ② より $s=\frac{2}{3},\ t=\frac{1}{6}$ よって $H\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

<別解> $\boxed{3点セット\ |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5},\ |\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2},\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4}$

$\boxed{0 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OH}} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})$　$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}=-4)$ $(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OA}=-4)$

$= -4+5s+4t \quad \therefore\ 5s+4t=4$

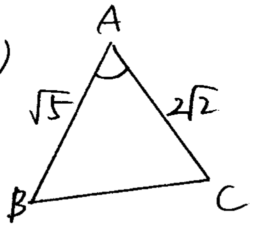
$\boxed{0 = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OH}} = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})$

$= -4+4s+8t \quad \therefore\ s+2t=1$

<以下略>

(2) $|\overrightarrow{OH}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

(3)



$\cos A = \frac{4}{\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

$\sin^2 A = 1-\frac{4}{10} = \frac{6}{10} \quad \therefore\ \sin A = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \sqrt{6}$

(4) $V = \frac{1}{3}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3}$