1 ベクトル（1）プリントより

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $6\vec{a}+\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。（8点）

$$0=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(6\vec{a}+\vec{b})$$
$$=6|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2$$
$$0=24-5\vec{a}\cdot\vec{b}-9$$
$$5\vec{a}\cdot\vec{b}=15$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$$
$$\cos\theta=\frac{3}{2\times3}=\frac{1}{2}\qquad \therefore\ \theta=60^\circ$$

2 ベクトル（1）プリントより

$\vec{a}=(-3,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 1)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。（8点）

$$\vec{a}+t\vec{b}=(-3,2)+t(2,1)$$
$$=(-3+2t,\ 2+t)$$
$$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(-3+2t)^2+(2+t)^2}$$
$$=\sqrt{5t^2-8t+13}$$
$$=\sqrt{5\left(t-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}$$

Min $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ $\left(t=\dfrac{4}{5}\right)$

（$\boxed{\text{別解}}$ $|\vec{a}|=\sqrt{13}$, $|\vec{b}|=\sqrt{5}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=13-8t+5t^2$

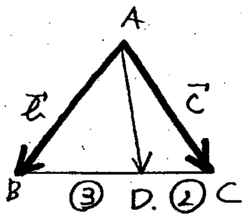
<以下略>）

3 ベクトル（3）プリントより

△ABC において，辺 BC を 3：2 に内分する点を D，辺 BC を 2：5 に外分する点を E，△ABD の重心を G とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。（各8点）

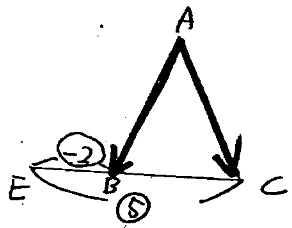
(1) $\overrightarrow{AD}$

$$=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$$



(2) $\overrightarrow{AE}$

$$=\frac{5\vec{b}-2\vec{c}}{-2+5}$$
$$=\frac{5}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$$



(3) $\overrightarrow{AG}$

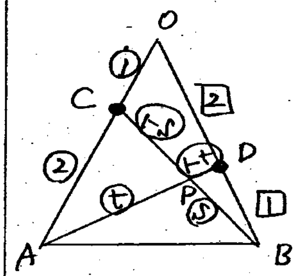
$$=\frac{\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{7}{15}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$$

(4) $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}$

$$=\frac{7}{15}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}-\left(\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{15}\vec{b}-\frac{2}{5}\vec{c}$$

4 ベクトル（4）プリントより

△OAB において，辺 OA を 1：2 に内分する点を C，辺 OB を 2：1 に内分する点を D，線分AD と線分BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。（10点）



$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OC}+(1-s)\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{s}{3}\vec{a}+(1-s)\vec{b}\quad\cdots①$$
$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OD}$$
$$=(1-t)\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{b}\quad\cdots②$$

①，②より $\begin{cases}\dfrac{s}{3}=1-t\\ 1-s=\dfrac{2}{3}t\end{cases}$

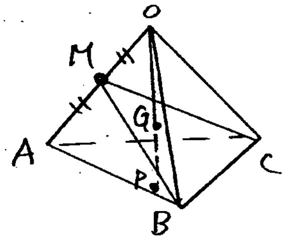
よって $s=\dfrac{3}{7}$, $t=\dfrac{6}{7}$

ゆえに $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{7}\vec{a}+\dfrac{4}{7}\vec{b}$

5 ベクトル（7）プリントより

四面体OABCにおいて，辺OAの中点をM，△MBCの重心をGとし，直線OGと平面ABCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。（6点）



$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$
$$=\underline{\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}$$

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。（8点）

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$$
$$=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c} \quad \cdots ①$$
$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$
$$=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$$
$$=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c} \quad \cdots ②$$

①，②より
$$\begin{cases}\frac{k}{6}=1-s-t\\ \frac{k}{3}=s\\ \frac{k}{3}=t\end{cases} \quad \therefore k=\frac{6}{5},\ s=\frac{2}{5},\ t=\frac{2}{5}$$

よって $\overrightarrow{OP}=\underline{\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}}$

（$\boxed{別解}$ ①において $\frac{k}{6}+\frac{k}{3}+\frac{k}{3}=1$

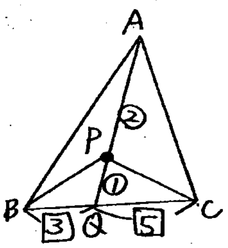
$\therefore\ k=\frac{6}{5}$ 〈以下略〉）

6 ベクトル（5）プリントより

△ABCと点Pがあり，$4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしている。

(1) 点Pの位置をいえ。（8点）

$$-4\overrightarrow{AP}+5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$
$$-12\overrightarrow{AP}=-5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$



$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ とおく。

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{5}{12}k\overrightarrow{AB}+\frac{k}{4}\overrightarrow{AC}$$

QはBC上の点だから

$$\frac{5}{12}k+\frac{k}{4}=1 \quad \therefore k=\frac{3}{2}$$
$$\overrightarrow{AQ}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$$

よって BCを3：5に内分する点をQとして

<u>AQを2：1に内分する点がPである。</u>

(2) 面積比△PBC：△PCA：△PABを求めよ。（6点）

$$\triangle PBC=\frac{1}{3}\triangle ABC$$
$$\triangle PCA=\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}\triangle ABC=\frac{5}{12}\triangle ABC$$
$$\triangle PAB=\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}\triangle ABC=\frac{1}{4}\triangle ABC$$

よって △PBC：△PCA：△PAB

$$=\frac{1}{3}:\frac{5}{12}:\frac{1}{4}=\underline{4:5:3}$$

7 ベクトル（6）プリントより

△OABにおいて，OA=4，OB=5，AB=6とし，垂心をHとする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

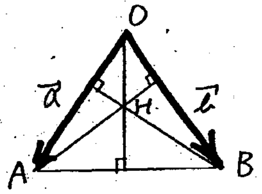
(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。（6点）

$$|\overrightarrow{AB}|=6$$
$$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=36$$
$$25-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+16=36$$
$$-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-5$$
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\underline{\frac{5}{2}}$$

$\boxed{別解}$ $\angle AOB=\theta$ として

$$\cos\theta=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{1}{8}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot5\cdot\frac{1}{8}=\underline{\frac{5}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。（8点）



$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおく。

$$\boxed{0=\vec{a}\cdot\overrightarrow{BH}}=\vec{a}\cdot(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})$$
$$=\vec{a}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{b})$$
$$0=16s+\frac{5}{2}t-\frac{5}{2}$$
$$\therefore 32s+5t=5 \quad \cdots ①$$
$$\boxed{0=\vec{b}\cdot\overrightarrow{AH}}=\vec{b}\cdot(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a})$$
$$0=\frac{5}{2}s+25t-\frac{5}{2}$$
$$5s+50t=5$$
$$s+10t=1 \quad \cdots ②$$

①，②より $s=\frac{1}{7}$，$t=\frac{3}{35}$

よって $\overrightarrow{OH}=\underline{\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{3}{35}\vec{b}}$