漸化式スペシャル①

[1]　$a_{n+1}=pa_n+(an+b)$ 型

例題1　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

＜解法①＞　番号を1つずつ上げて，2式の差をとる。そして，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおく。

$$
\begin{array}{rl}
 & a_{n+2}=3a_{n+1}+4(n+1) \\
-) & a_{n+1}=3a_n+4n \\
\hline
 & a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+4
\end{array}
$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおく。

$a_2=3a_1+4=7$ より

$b_1=a_2-a_1=6$

$$
\begin{array}{rl}
 & b_{n+1}=3b_n+4 \quad (b_1=6) \\
-) & c=3c+4 \\
\hline
 & b_{n+1}-c=3(b_n-c)
\end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{l} -2c=4 \\ c=-2 \end{array}\right)
$$

$c=-2$ を代入して

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}+2&=3(b_n+2)\\
&=3^n(b_1+2)\\
&=8\cdot 3^n
\end{aligned}
$$

よって　$b_n=8\cdot 3^{n-1}-2$

$a_{n+1}-a_n=8\cdot 3^{n-1}-2$

$n\geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n&=1+\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot 3^{k-1}-2)\\
&=1+\frac{8(3^{n-1}-1)}{3-1}-2(n-1)\\
&=\boxed{4\cdot 3^{n-1}-2n-1}
\end{aligned}
$$
（$n=1$ でも成立）

＜解法②＞　$f(n)=\alpha n+\beta$ とおき，$a_{n+1}=3a_n+4n$ が，

$$a_{n+1}-f(n+1)=3\{a_n-f(n)\} \quad \cdots\cdots ①$$

の形に変形できるように α，β の値を定める。

$$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=3\{a_n-(\alpha n+\beta)\} \quad \cdots ②$$

整理して　$a_{n+1}=3a_n-3(\alpha n+\beta)+\alpha(n+1)+\beta$

$a_{n+1}=3a_n-2\alpha n+\alpha-2\beta$

$$\begin{cases} -2\alpha=4 \\ \alpha-2\beta=0 \end{cases} \qquad \therefore \alpha=-2,\ \beta=-1$$

② より　$a_{n+1}+2(n+1)+1=3(a_n+2n+1)$

$b_n=a_n+2n+1$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$　$(b_1=a_1+3=4)$

よって　$b_n=4\cdot 3^{n-1}$

したがって　$a_n+2n+1=4\cdot 3^{n-1}$

$$\therefore\ a_n=\boxed{4\cdot 3^{n-1}-2n-1}$$

[2] 対数の利用

$\boxed{\text{例題2}}$ $a_1=1$, $a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

<解法> 両辺に log をとる。

(※明らかに、両辺は正である。)

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 (2\sqrt{a_n})$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2 + \log_2 a_n^{\frac{1}{2}}$$

$$\log a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\log_2 a_n$$

$b_n = \log_2 a_n$ とおくと

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 1 \quad (b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 1 = 0)$$

$$\underline{-)\quad c = \frac{1}{2}c + 1} \quad \longrightarrow \left(\begin{array}{l} 2c = c+2 \\ c = 2 \end{array}\right)$$

$$b_{n+1} - c = \frac{1}{2}(b_n - c)$$

$c=2$ を代入して

$$b_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(b_n - 2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_1 - 2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (-2)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって $b_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2$

$$\log_2 a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_n = \boxed{2^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}}$$

<練習問題>

$\boxed{1}$ $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$ $a_n = 7\cdot 2^{n-1} - 3n - 3$

$\boxed{2}$ $a_1=5$, $a_{n+1}=8a_n^2$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$ $a_n = \frac{1}{8}\cdot 40^{2^{n-1}}$