漸化式スペシャル②

［1］　隣接3項間漸化式

例題1　$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}-3a_{n+1}-10a_n=0$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

＜解法＞ $\boxed{a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)}$ の形を２通り作る。

補足　これを変形すると

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$$

となり，2次方程式の「解と係数の関係」を連想できます。

例題１の漸化式を2次方程式　$x^2-3x-10=0$　と見れば、その２解が α,β です。

（特性方程式 $x^2-3x-10=0$

$(x-5)(x+2)=0$　$\therefore x=5,-2$ ）

[1] $a_{n+2}+2a_{n+1}=5(a_{n+1}+2a_n)$

$b_n=a_{n+1}+2a_n$ とおくと

$b_{n+1}=5b_n$ $(b_1=a_2-a_1=1)$

$b_n=5^{n-1}$

よって $a_{n+1}+2a_n=5^{n-1}$ …①

[2] $a_{n+2}-5a_{n+1}=-2(a_{n+1}-5a_n)$

$c_n=a_{n+1}-5a_n$ とおくと

$c_{n+1}=-2c_n$ $(c_1=a_2-5a_1=1)$

$c_n=(-2)^{n-1}$

よって $a_{n+1}-5a_n=(-2)^{n-1}$ …②

①－② より

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}+2a_n=5^{n-1} \\ -) & a_{n+1}-5a_n=(-2)^{n-1} \\ \hline & 7a_n=5^{n-1}-(-2)^{n-1} \end{array}$$

よって $a_n=\boxed{\dfrac{5^{n-1}-(-2)^{n-1}}{7}}$

[2] 連立漸化式

例題2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。

$$a_1=2,\ b_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+b_n,\ b_{n+1}=a_n+3b_n$$

(1) 数列 $\{a_n+b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n-b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

解 (1) $a_{n+1}+b_{n+1}=4(a_n+b_n)$

$x_n=a_n+b_n$ とおく。

$x_{n+1}=4x_n\ (x_1=a_1+b_1=3)$

$x_n=3\cdot4^{n-1}$ ∴ $a_n+b_n=\boxed{3\cdot4^{n-1}}$ …①

(2) $a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$

$y_n=a_n-b_n$ とおく。

$y_{n+1}=2y_n\ (y_1=a_1-b_1=1)$

$y_n=2^{n-1}$ ∴ $a_n-b_n=\boxed{2^{n-1}}$ …②

(3) ①+② より $2a_n=3\cdot4^{n-1}+2^{n-1}$

∴ $a_n=\boxed{\dfrac{3\cdot4^{n-1}+2^{n-1}}{2}}$

①−② より $2b_n=3\cdot4^{n-1}-2^{n-1}$

∴ $b_n=\boxed{\dfrac{3\cdot4^{n-1}-2^{n-1}}{2}}$

<練習問題>

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_2=4,\ a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0$

(2) $a_1=0,\ a_2=2,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

解答 (1) $a_n=\dfrac{7\cdot2^{n-1}-2(-3)^{n-1}}{5}$ (2) $a_n=(n-1)\cdot2^{n-1}$

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。

$$a_1=0,\ b_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3b_n,\ b_{n+1}=a_n-b_n$$

(1) 数列 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-3b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

解答 (1) $a_n+b_n=2^{n-1}$, $a_n-3b_n=-3(-2)^{n-1}$

(2) $a_n=\dfrac{3\cdot2^{n-1}-3(-2)^{n-1}}{4}$, $b_n=\dfrac{2^{n-1}+3(-2)^{n-1}}{4}$